

Das Galtonbrett und der zentrale Grenzwertsatz

Fierke, E. & Janik, T. & Weidlich, L.
Seminar Erweitertes Fachwissen - Mathe Club

Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kernideen	2
3	Stichworte	2
4	Mathematischer Hintergrund	3
4.1	Beweis des zentralen Grenzwertsatzes	3
4.2	Stirling-Approximation	11
4.3	Taylor-Approximation	13
4.4	Gamma-Funktion	16
4.5	Galtonbrett	17
5	Arbeitsmaterialien	17
6	Zeitplan	18
7	Weiterführende Ideen	18
8	Einordnung in den Lehrplan	18
A	Anhang 1	18
B	Anhang 2	18

1 Einleitung

Wichtig: Dieses Dokument hier soll nicht mehr als 30 Seiten umfassen (mehr bitte nur nach Absprache).

Ziel des Seminars ist die Ausarbeitung eines „rundum-sorglos-Pakets“ für eine Einheit in einem Matheclub, einer Mathe-AG oder einer ähnlichen Veranstaltung an einem Gymnasium. Unter einer Einheit ist nicht zwingend eine Doppelstunde zu verstehen, aber eine Doppelstunde soll mindestens mit Inhalt gefüllt werden.

Besonders wichtig ist es die folgenden Punkte zu beachten:

1. Es handelt sich um ein Zusatzangebot (Freizeit!) für die Schülerinnen und Schüler. Der Spaß an der Mathematik darf also auf keinen Fall zu kurz kommen.
2. Mathclubs sind in der Regel nach Jahrgängen aufgeteilt. Bei uns sollen als Zielgruppe die Klassenstufen 9-12 angenommen werden. Wählen Sie sinnvoll eine Klassenstufe aus, für die sich ihr Thema eignet. Welche Voraussetzungen bringen die Schülerinnen und Schüler mit?
3. Gehen Sie davon aus, dass Sie es mit motivierten Schülerinnen und Schülern zu tun haben. Die Kinder erwarten klare Argumente, Beweise, etc., die auch über den

Lehrplan (deutlich) hinaus gehen.

4. Überlegen Sie, woran Sie Spaß hätten. Seien Sie kreativ!

Wir wollen eine Datenbank für Mathe-Clubs aufbauen. Daher ist eine einheitliche Struktur aller Datensätze zwingend erforderlich. Es sind somit einige technische Punkte zu beachten:

- Halten Sie sich bitte streng an die vorgegebene Latex-Vorlage (inklusive Ordner- und Dateistruktur).

Die Einleitung soll einen kurzen Überblick über den Inhalt des Dokuments geben. Sie soll den Leser neugierig machen und ihn dazu bringen, weiterzulesen. Hier gehören gegebenenfalls (nicht zwingend notwendig!) auch eine geschichtliche Einordnung und Anekdoten hinein (als Unterkapitel).

2 Kernideen

In dieser Arbeit widmen wir uns der mathematischen Formalisierung eines faszinierenden Phänomens: Wie verteilen sich zufällige Ereignisse, wenn sie sehr oft wiederholt werden? Als anschauliches Modell dient uns hierfür das Galtonbrett, bei dem Kugeln an Hindernissen zufällig nach links oder rechts fallen.

Der mathematische Rahmen bewegt sich dabei im Übergang von der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie zur stetigen Analysis. Wir modellieren den Fall einer Kugel zunächst als Summe unabhängiger, identisch verteilter Bernoulli-Zufallsvariablen, was direkt zur Binomialverteilung führt. Da die direkten Berechnungen der Binomialkoeffizienten für eine große Anzahl an Reihen (für $n \rightarrow \infty$) aufgrund der Fakultäten extrem aufwendig werden, suchen wir nach einer asymptotischen Näherung. Außerdem ist es ein sehr schönes Resultat, dass aus einer Binomialverteilung eine Normalverteilung „entstehen“ kann.

Den größeren Kontext bildet die Verknüpfung grundlegender mathematischer Werkzeuge, um genau dies zu beweisen. Wir greifen auf die *Stirling-Approximation* (zur Näherung von Fakultäten) und die *Taylor-Entwicklung* (zur Approximation von Logarithmen) zurück. Diese analytischen Werkzeuge schlagen die Brücke zwischen der diskreten Welt des Pascalschen Dreiecks und der kontinuierlichen Welt der Exponentialfunktion.

Das Herzstück der Arbeit und die formale Antwort auf unsere Fragestellung bildet der *Zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace*. Er besagt, dass sich die diskrete Binomialverteilung für große n der stetigen Normalverteilung (der bekannten Gaußschen Glockenkurve) annähert.

Damit wird mathematisch präzise gezeigt, wie ein System aus einfachen, binären Entscheidungen (links oder rechts) bei ausreichend vielen Wiederholungen unweigerlich in ein universelles, kontinuierliches Verteilungsmodell mündet.

3 Stichworte

Die folgenden **Stichworte** decken in etwa den Inhalt des ausgearbeiteten Themengebietes ab:

- Stochastik
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace
- Stirling-Approximation

- Taylor-Entwicklung
- Pascalsches-Dreieck
- Gamma-Funktion
- Klasse 10 bis 12

4 Mathematischer Hintergrund

4.1 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Das Galtonbrett (nach Francis Galton) dient der Veranschaulichung der Binomialverteilung und der experimentellen Bestätigung vom Zentralen Grenzwertsatz im Spezialfall der Binomialverteilung. Im Folgenden formalisieren wir den Weg einer Kugel durch das Brett als stochastischen Prozess mithilfe einer Binomialverteilung und Beweisen anschließend den zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace [nahrstedt·monte-carlo-methode·2015].

Definition 4.1.1: Modell des Galtonbretts

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der Fall einer Kugel durch ein Galtonbrett mit $n \in \mathbb{N}$ Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n , wobei $X_i \in \{0, 1\}$. Dabei beschreibt $X_i = 1$ **den Fall nach rechts** in der i -ten Reihe und $X_i = 0$ **den Fall nach links**. Die Wahrscheinlichkeit sei $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$. Bei einem symmetrischen Brett gilt $p = q = 0.5$.

nach [buchter·elementare·2005]

Bemerkung 4.1.2. X_i Bernoulliverteilt

Hierbei ist anzumerken, dass jedes X_i bernoulliverteilt ist.

Dies gilt, da

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{und} \quad P(X_i = x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = 1 \\ 1 - p & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Somit lässt sich auch $X_i \sim \mathcal{B}_p$ schreiben.

Um jeden Ausgang des Galtonbrettes durchnummeriert von links nach rechts unterscheiden zu können, definieren wir uns eine weitere Zufallsvariable S_n wie folgt:

Definition 4.1.3: Zufallsvariable S_n

Die Endposition der Kugel im Fach $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird durch die Summe der Rechtsabbiegungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

nach [statistik·verstehen·beweis·2019]

Um diese summierte Zufallsvariable genauer zu verstehen betrachten wir zuerst den Binomialkoeffizienten.

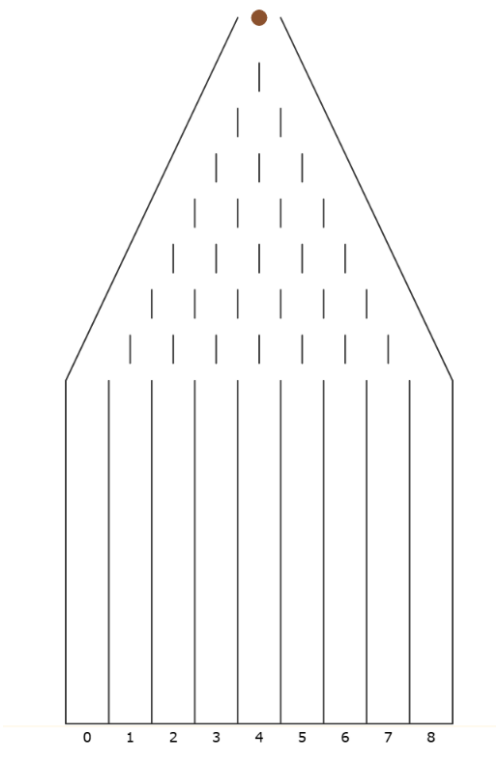


Abbildung 1: Darstellung des Galtonbretts nach [arndt`brunner`simulation`2025]

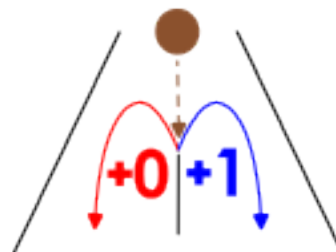


Abbildung 2: Darstellung der Zufallsvariable X_i im Kontext vom Galtonbrett

Definition 4.1.4: Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

wobei die Zahl $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge genau k -Elemente auszuwählen, angibt.

[kosenkova`stochastik`2025]

Betrachten wir nun den Binomialkoeffizienten in Bezug auf S_n , beschreibt dieser exakt die Anzahl der möglichen Pfade durch das Galtonbrett, bei denen die Kugel von n Reihen genau k -mal nach rechts (und somit $(n-k)$ -mal nach links) fällt. Da jeder dieser einzelnen Pfade aufgrund der Unabhängigkeit der Entscheidungen die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$ besitzt, ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Fach k durch Multiplikation. Daher rührt die Binomialverteilung:

Definition 4.1.5: Binomialmodell

Wiederholt man ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ n -mal, und interessiert sich nur für die Anzahl der erfolgreichen Experimente, so wählt man

$$\Sigma = \{0, 1, \dots, n\}.$$

In diesem Modell ist

$$Bin_{n,p}(\{k\}) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

eine Zähldichte.

[kosenkova`stochastik`2025]

Im Fall des Galtonbrettes können wir $\Sigma = S_n$ wählen.

Definition 4.1.6: Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Zähldichte $Bin_{n,p}(\{k\})$ auf $\{0, \dots, n\}$ heißt Binomialverteilung zu den Parametern n, p .

[kosenkova`stochastik`2025]

Anschließend ist folgendes zu bemerken:

Satz 4.1.7: Verteilung der Endposition

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable S_n , lässt sich durch die Binomialverteilung beschreiben.

Daher gilt $S_n \sim Bin_{n,p}$

Beweis. Nach Bemerkung 4.1.2 und Definition 4.1.3 ist S_n die Summe von n unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{B}_p$. Also stellt S_n die Anzahl der Erfolge von n -Wiederholungen von unabhängigen identisch Bernoulli-verteilten Zufallsexperimenten dar.

Daraus folgt, dass das Galtonbrett mit der Zufallsvariable S_n eine Binomialmodell Definition 4.1.5 darstellt und somit die Binomialverteilung nach Definition 4.1.6 eine Zähldichte definiert. Daher gilt: $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$. \square

Eine weitere in diesem Kontext interessante Verteilung ist die Normalverteilung.

Definition 4.1.8: Normalverteilung

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, wobei μ den Erwartungswert und σ^2 die Varianz von X darstellt, so nennt man X *Normalverteilt* und schreibt:

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Für große n wird die direkte Berechnung der Binomialverteilung aufgrund der Fakultäten sehr aufwendig. An dieser Stelle greift der zentrale Grenzwertsatz, der besagt, dass sich die Binomialverteilung für große n der Normalverteilung annähert. Für große n lässt sich damit die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (aufgrund der Standardisierung) deutlich leichter bestimmen. Des weiteren ist es mathematisch gesehen sehr schön zu sehen, wie eine relativ einfache diskrete Verteilung, wie die Binomialverteilung, mit einer mathematisch persé sehr anders aussehenden Verteilung zusammenhängt. Im Spezialfall der Binomialverteilung wird dies durch den Satz von Moivre-Laplace formalisiert [nahrstedt`monte-carlo-methode`2015; statistik`verstehen`beweis`2019].

Satz 4.1.9: Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und sei $q = 1 - p$. Für große n lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass S_n den Wert $k \in \{x | x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq n\}$ annimmt, durch die Dichtefunktion der Normalverteilung annähern:

$$P(S_n = k) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

wobei $\mathbb{E}(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$ und $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ begrenzt ist.

nach [kosenkova`stochastik`2025]

Beweis. Der Beweis folgt zum großen Teil dem Beweis von [statistik`verstehen`beweis`2019] und wurde von den Autoren weiter konkretisiert.

Der Beweis basiert im Wesentlichen auf drei Approximationen: Der Stirling-Formel für die Fakultäten, der Vereinfachung der Wurzelausdrücke für große n , sowie der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus zur Herleitung der Exponentialfunktion. Diese drei Approximationen werden in diesem Beweis als wahr angenommen, jedoch in der folgenden Arbeit weiter analysiert und bewiesen.

1. Anwendung der Stirling-Formel:

Wir beginnen mit der Definition der Binomialwahrscheinlichkeit:

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nach Satz 4.2.1 gilt für große Zahlen näherungsweise $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ersetzen wir $n!$, $k!$ und $(n-k)!$ durch diese Näherung:

$$P(S_n = k) \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k)(\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{(n-k))} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{k^k \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^k \cdot n^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k} \sqrt{(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (3)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (1) Hier heben sich die e -Potenzen heraus, da $\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n \cdot e^{-n}$ sowie $e^n / (e^k e^{n-k}) = 1$ gilt.
- (2) Hier lässt sich die Gleichung intelligent aufteilen und etwas umstellen durch die Potenzgesetze, da gilt: $n^n = n^k \cdot n^{n-k}$. Außerdem lässt sich einmal $\sqrt{2\pi}$ kürzen.
- (3) Ist das Resultat nach dem Sortieren der Brüche anhand der Exponenten.

2. Substitution und Approximation der Wurzeln:

In diesem Teil des Beweises werden O-Notationen verwendet und ein grundlegendes Verständnis dieser vorausgesetzt.

Um das Breiter werden der Verteilung und das Abwandern des Erwartungswertes zu verhindern standardisieren wir die Zufallsvariable, indem wir

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

definieren. Nun nimmt Z_n Werte $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ an, nach k umgestellt heißt das

$$k = np + z\sqrt{npq}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $-(1)$ und addiert man n erhält man einen ähnlichen Ausdruck für $n-k$:

$$n-k = nq - z\sqrt{npq}$$

Nun betrachten wir $k \cdot (n-k)$ für $n \rightarrow \infty$:

$$k(n-k) = (np + z\sqrt{npq}) \cdot (nq - z\sqrt{npq}) \quad (4)$$

$$= n^2 pq + (nz\sqrt{npq}(q-p) - z^2 npq) \quad (5)$$

$$= n^2 pq + O(n) \quad (6)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (4) Die Formeln für k und $n-k$ einsetzen.
- (5) Das Distributivgesetz anwenden und nach der Potenz von n sortieren.
- (6) n^2 geht für $n \rightarrow \infty$ schneller nach unendlich als die linearen Restterme. Folglich sind diese für die Abschätzung gegen unendlich im folgenden vernachlässigbar.

Setzen wir dieses Ergebnis nun in das Zwischenergebnis von Gleichung (3) ein, so erhalten wir folgendes:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n^2 pq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \quad (9)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (7) Die Approximation verwenden.
- (8) n kürzen und die Potenz-/Wurzelgesetze anwenden, um den Bruch zu vereinfachen.
- (9) Den Kehrwert der Brüche bilden und die Wurzeln zusammenfassen.

Es ist bereits der korrekte konstante Faktor der gaußschen Glockenkurve erkennbar.

3. Taylor-Approximation des exponentiellen Teils:

Den restlichen Term formen wir um, indem wir ihn logarithmieren, um im Anschluss die Approximationsformel für den Logarithmus verwenden zu können. Diese wird ebenso wie die Stirling-Formel im Anschluss bewiesen. Hierzu betrachten wir folgendes zuerst einzeln:

$$\ln\left(\left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k}\right) \quad (10)$$

$$= -k \ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) \quad (11)$$

$$= -(np + z\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{np + z\sqrt{npq}}{np}\right) - (nq - z\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{nq - z\sqrt{npq}}{nq}\right) \quad (12)$$

$$= (-np - z\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \quad (13)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (10) Den Logarithmus anwenden.
- (11) Logarithmengesetze für Potenzen anwenden.
- (12) Gleichheit für k aus der Standardisierung einsetzen: $k = np + z\sqrt{npq}$.
- (13) Distributivgesetz für -1 anwenden und Brüche durch Aufteilen der Addition und Einfügen der multiplikativen Identität $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{np}}$ (selbes für nq) vereinfachen.

Die Definition 4.3.5 beweist die Taylor-Approximation für den Logarithmus: $\ln(1 - \alpha) = -\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$ und $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$ für $\alpha \in (-\infty, 1)$. Hierbei steht $O(\alpha^3)$ für die Landau-Notation. Wir definieren:

$$\beta := \sqrt{\frac{q}{np}}; \quad \gamma := \sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Um diese Approximation zu verwenden, muss sicher sein, dass $-1 < |\alpha| < 1$. Das heißt, dass $\forall z \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} -1 < |z \cdot \beta| < 1$. (Für $z \cdot \gamma$ analog) Hierbei genügt die Abschätzung gegen unendlich, da wir die Annäherung nur für große Zahlen beweisen wollen.

Sei also $z \in \mathbb{N}$, dann betrachten wir:

$$|z \cdot \beta| \stackrel{Def.}{=} \left| z \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right| = |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und $-1 < 0 < 1$

Da p und q konstante Parameter sind.

Betrachten wir nun die Logarithmen für die Taylor-Approximation näher:

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) &\sim z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2}{2} + O((z\beta)^3) \\ &= z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2q}{2np} + O((z\beta)^3) \end{aligned}$$

und für den anderen \ln analog:

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &\sim -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2}{2} + O((-z\gamma)^3) \\ &= -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2p}{2nq} + O((z\gamma)^3) \end{aligned}$$

"- " fällt wegen O weg

Setzen wir dies nun zurück in Gleichung (12) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(-np - z\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + O(z^3) \\ &= (-np - z\sqrt{npq})\left(z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2q}{2np} + O((z\beta)^3)\right) \\ &\quad + (-nq + z\sqrt{npq})\left(-z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2p}{2nq} + O((z\gamma)^3)\right) + O(z^3) \\ &= (-npz\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{npz^2q}{2np} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{q}{np}} + O((z\beta)^3)) + O(z^3) \\ &\quad + (nqz\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{nqz^2p}{2nq} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{p}{nq}} + O((z\gamma)^3)) \\ &\quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-z\sqrt{\frac{(np)^2q}{np}} + \frac{z^2q}{2} - z^2\sqrt{\frac{npq^2}{np}} + O((z\beta)^3)\right) \\ &\quad + \left(z\sqrt{\frac{(nq)^2p}{nq}} + \frac{z^2p}{2} - z^2\sqrt{\frac{np^2q}{nq}} + O((z\gamma)^3)\right) \\ &\quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-z\sqrt{npq} - z^2q + \frac{z^2q}{2} + O((z\beta)^3)\right) + \left(z\sqrt{npq} - z^2p + \frac{z^2p}{2} + O((z\gamma)^3)\right) \\ &\quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\sim \left(-z\sqrt{npq} - \frac{z^2q}{2}\right) + \left(z\sqrt{npq} - \frac{z^2p}{2}\right) \tag{17}$$

$$= -\frac{z^2 q}{2} - \frac{z^2 p}{2} = -\frac{z^2}{2}(p+q) \quad (18)$$

$$= -\frac{z^2}{2} \quad (19)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (14) Das Distributivgesetz anwenden.
- (15) np und nq mithilfe des Quadrates in die Wurzel ziehen, sowie Kürzen und Wurzeln zusammenfassen. Alle Terme mit z^3 werden von $O(z^3)$ nach dessen Definition „absorbiert“.
- (16) np und nq in den Wurzeln Kürzen und Kommutativgesetz anwenden.
- (17) Die Landau Terme können vernachlässigt werden, da diese Terme für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, sofern z beschränkt ist. Betrachte Hierzu Lemma 4.1.10 und Proposition 4.1.11.
- (18) $-z\sqrt{npq} + z\sqrt{npq} = 0$ und Distributivgesetz (invers) anwenden.
- (19) Es gilt $p+q=1$, da $q=1-p$ definiert wurde.

Da $e^{\ln(l)} = l$ setzen wir nun $e^{-\frac{z^2}{2}}$ in Gleichung (9) ein, kommen wir zum finalen Ergebnis:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)} \quad (21)$$

$$= \mathcal{N}(np)(npq) = \mathcal{N}(\mu)(\sigma^2) \quad (22)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (20) Rücksubstitution der Standardisierung.
- (21) Der Bruch wurde quadriert und zusammengefasst.
- (22) Definition der Standardnormalverteilung angewendet.

Daher konvergiert eine Binomialverteilte Zufallsvariable (für $n \rightarrow \infty$) gegen die Dichtefunktion der Normalverteilung. \square

Lemma 4.1.10: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme mit Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und z Werte einer standardisierten, binomialverteilten Zufallsvariable wobei z begrenzt ist. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus multipliziert mit ihren jeweiligen Vorfaktoren gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma = \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

Beweis. Da z begrenzt ist, gilt: $\exists M \in \mathbb{N} : |z| < M$. Wir betrachten exemplarisch den ersten Summanden (der zweite Verhält sich vollkommen analog). Da $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$, verhält

sich der Restterm dritter Ordnung bezüglich n wie folgt:

$$O((z\beta)^3) = O\left(z^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3\right) = O\left(\frac{M^3 q^{3/2}}{p^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\right) = O(n^{-3/2})$$

Nach der Definition der Landau-Notation existiert für hinreichend große n eine Konstante $C > 0$, sodass der Betrag dieses Restterms durch $C \cdot n^{-3/2}$ nach oben beschränkt ist. Multiplizieren wir dies mit dem Betrag des Vorfaktors, erhalten wir mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \left|(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O(n^{-3/2})\right| &\leq (np + |z|\sqrt{npq}) \cdot C \cdot n^{-3/2} \\ &= C \cdot np \cdot n^{-3/2} + C \cdot |z|\sqrt{npq} \cdot n^{-3/2} \\ &= C \cdot p \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + C \cdot |z|\sqrt{pq} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da C, p, q und z in diesem Fall von n unabhängige Konstanten sind und n im Nenner unbegrenzt wächst, strebt dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen:

$$0 + 0 = 0$$

Für den zweiten Term mit γ erfolgt der Beweis völlig analog, womit die Summe beider Terme ebenfalls gegen 0 konvergiert. \square

Folgende Proposition ist leicht aus dem oberen Beweis ableitbar (aufgrund der Abschätzung mit $n^{-3/2}$ und der Betrachtung von z als beschränkt) und wird daher nicht separat bewiesen.

Proposition 4.1.11: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme ohne Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und z Werte einer standardisierten, binomialverteilten Zufallsvariable wobei z begrenzt ist. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} O((z\beta)^3) + O((z\gamma)^3) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ O(z^3) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma = \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

4.2 Stirling-Approximation

Die Stirling-Approximation ist eine mathematische Näherung zur Berechnung der Fakultät einer Zahl. Die Approximation ist vorallem in der Stochastik und der statistischen Physik ein unverzichtbares Werkzeug. Wir schauen sie daher im Folgenden im Detail an.

Satz 4.2.1: Stirlingformel

Für $n \mapsto \infty$ gilt nach STIRLINGS Approximation, dass

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

[freitag1995-oj]

Beweis. Der Ausgangspunkt ist die nach Definition 4.4.1 definierte **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Wir schreiben den Integranden als Exponentialfunktion, dann haben wir

$$t^{x-1} e^{-t} = \exp((x-1) \ln t - t)$$

also ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp((x-1) \ln t - t) dt$$

Setze $t = xu$ und $f(u) = \ln u - u$, dann erhalten wir

$$\Gamma(x) = x^x \cdot \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-xu} du \quad (23)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} \exp(x(\ln u - u)) du \quad (24)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} e^{xf(u)} du \quad (25)$$

Für große x wird das Integral durch die Umgebung des kritischen Punktes von f dominiert. Diese erhält man aus

$$f'(u) = \frac{1}{u} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1.$$

Weiter gilt

$$f''(u) = -\frac{1}{u^2}, \quad \text{also } f''(1) = -1.$$

Damit besitzt f bei $u = 1$ einen stationären Punkt, und wir entwickeln f dort bis zur zweiten Ordnung:

$$f(u) \sim f(1) + \frac{f''(1)}{2}(u-1)^2 = -1 - \frac{(u-1)^2}{2}.$$

Einsetzen liefert die lokale Approximation

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du.$$

Da der Hauptbeitrag aus einer Umgebung von $u = 1$ stammt, kann das Integral asymptotisch auf \mathbb{R} erweitert werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Damit erhält man

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

□

4.3 Taylor-Approximation

Um eine Taylorapproximation für eine Funktion zu finden, müssen wir zunächst nachweisen, dass die Funktion die wir approximieren wollen, $(n+1)$ -mal differenzierbar ist. Da wir unsere Approximation nach dem quadratischen Term abbrechen werden genügt es zu zeigen, dass $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar ist.

Lemma 4.3.1

$f(x) = \ln(1-x)$ ist mindestens dreimal differenzierbar.

Beweis. Zum Beweis berechnen wir die drei Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(1-x))' \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' && \text{Kettenregel} \\ &= -\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(-\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{(-1)' \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} && \text{Quotientenregel} \\ &= \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} && \text{da } (-1)' \cdot (1-x) = 0 \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (f''(x))' \\ &= \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{(-1)' \cdot (1-x)^2 - (-1) \cdot ((1-x)^2)'}{((1-x)^2)^2} && \text{Quotientenregel} \\ &= \frac{((1-x)^2)'}{(1-x)^4} && \text{da } (-1)' \cdot (1-x)^2 = 0 \\ &= \frac{-2 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} && \text{Kettenregel} \\ &= \frac{-2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

□

Nun haben wir nachgewiesen, dass die Funktion $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.3.2

Mit einem Blick auf die Funktion und wie ihre Ableitungen gebildet werden, ist leicht zu erkennen, dass $\ln(x-1)$ sogar unendlich oft differenzierbar ist.

Bevor wir die Approximation nachweisen, ist eine formale Definition des Satzes von Taylor und dem Taylorpolynom nötig, wobei letzteres aus dem Satz von Taylor folgt.

Satz 4.3.3: Satz von Taylor

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in [a, b]$.

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Es existiert ein (von x abhängiges $\xi \in I(x_0, x)$), sodass für das Lagrange-Restglied gilt:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

[enders'analysis'2024]

Bemerkung 4.3.4

Das Lagrange-Restglied ist in den meisten Fällen eine Funktion vom Grad $n + 1$, aufgrund des letzten Faktors. Es kann aber auch sein, dass das Lagrange-Restglied das Nullpolynom ist, je nach Wahl von ξ und der Auswertung von der n -ten Ableitung von f an der Stelle ξ .

Dadurch können wir das Restglied auch auffassen als ein Element von $O(x^n)$. Nach der Definition der Landaunotation gilt: für alle $a, b \in \mathbb{R} : a * x^n + b$ liegt in $O(x^n)$. Man kann somit das Landausymbol O als Ansammlung von Funktionen verstehen. Interessanterweise gilt auch eine Relation zwischen den einzelnen „Landaumengen“. Für alle n in $\mathbb{N} : O(x^n)$ ist in $O(x^{n+1})$. In der Informatik wird diese Notation genutzt, um asymptotische Verhalten von beispielsweise Laufzeiten zu beschreiben. „Algorithmus A braucht asymptotisch so viel Zeit in Abhängigkeit von der Eingabe, wie eine x^n -Funktion“.

Die Definition des Taylorpolynoms entspringt direkt dem Satz von Taylor, nur ohne das Lagrange-Restglied.

Definition 4.3.5: Taylorpolynom

$$T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

[enders'analysis'2024]

Bemerkung 4.3.6

Der Satz von Taylor liefert eine lokale Approximation an eine Funktion f durch das Taylorpolynom.

Nun können wir unsere Approximation von $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ zeigen.

Lemma 4.3.7

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Beweis. Zunächst ist der Definitionsbereich von $\ln(1-x)$ gleich dem Intervall $(-\infty, 1)$. Zudem ist die Funktion $\ln(1-x)$ mindestens dreimal differenzierbar. Betrachten wir $x \in (-\infty, 1)$ und $x_0 = 0$.

Das zweite Taylor-Polynom lautet

$$\begin{aligned} T_{\ln(1-x),0,2}(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \cdot (\ln(1-x_0))^{(k)} (x-x_0)^k \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \ln(1) \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot (\ln(1))^{(1)} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (\ln(1))^{(2)} \cdot x^2 \quad \text{Lemma 4.3.1} \\ &= 0 + 1 \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot x^2 \\ &= -x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Taylor (Satz 4.3.3) folgt somit:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

wobei das Lagrange-Restglied etwa $R_2(x) \sim O(x^3)$, denn

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{1}{(2+1)!} \cdot (\ln(1-\xi))^{(2+1)} \cdot (x-0)^{(2+1)} \\ &= -\frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \quad \text{für ein } \xi \in (0, x) \quad \text{Lemma 4.3.1} \end{aligned}$$

wobei nach der Landau-Notation gilt: $a \cdot x^n + b \in O(x^n)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \in O(x^3),$$

da $\frac{1}{3(1-\xi)^3}$ konstant für ein ξ im Intervall.

Da ξ variabel ist (also von x abhängt), steht $O(x^3)$ stellvertretend für ein gut passendes Polynom vom Grad 3.

$$\Rightarrow \ln(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

□

Bemerkung 4.3.8

Aus der Definition folgt die Gleichheit beider Funktionen, aber genauer betrachtet kann die \ln -Funktion nicht durch ein Polynom dargestellt werden. Es wird immer einen gewissen Fehler geben. Da auch in Abhängigkeit von x das ξ gewählt wird, handelt es sich bei dem Lagrange-Restglied nicht um ein Polynom, weil es sich dynamisch verändert.

Im Plot können wir sehen, dass beide Funktionen um unsere Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ herum sehr ähnlich sind.

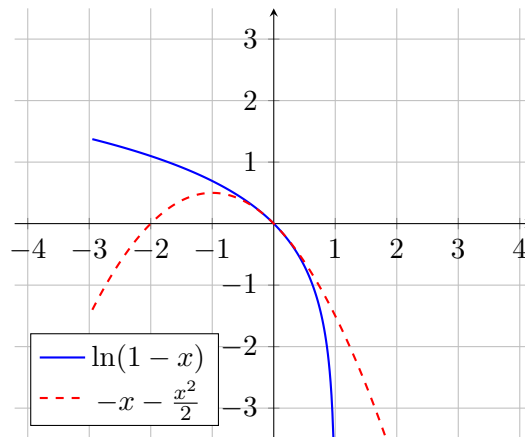


Abbildung 3: Darstellung der Funktionen $\ln(1-x)$ und $-x - \frac{x^2}{2}$

Würden wir die Entwicklung weiterführen, approximiert die violette Funktion (unser Taylorpolynom) die orangene Funktion ($\ln(1-x)$) immer weiter. Graphisch lässt sich erkennen, dass für Werte im Intervall $I(-0.5, 0.5)$ die Funktion $\ln(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2}$ plus ein kleiner Fehler ist.

4.4 Gamma-Funktion

Zum nachfolgenden Betrachtung und des Beweises der Stirling-Approximation betrachten wir nun die Gamma-Funktion, auch **Eulersches Integral zweiter Gattung** genannt. Sie erweitert die Fakultätsfunktion von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} auf reelle und komplexe Zahlen (mit einigen Ausnahmen). Hier betrachten wir der Einfachheit halber nur die Gamma-Funktion in \mathbb{R} .

Definition 4.4.1: Gamma-Funktion

Sei $x > 0 \in \mathbb{R}$, dann ist die **Gamma-Funktion** definiert durch

$$\Gamma(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

[nielsen1906]

Die Gamma-Funktion berechnet wie folgt die Fakultät in \mathbb{N} :

Satz 4.4.2: Vergleich mit der Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

4.5 Galtonbrett

Das Galtonbrett ist ein bekanntes Modell zur Veranschaulichung der Normalverteilung der Stochastik. Es demonstriert visuell, wie aus einer Vielzahl von zufälligen unabhängigen Einzelereignissen eine feste mathematische Gesetzmäßigkeit entsteht. Naiv betrachtet ist es nicht auf dem ersten Blick deutlich, dass aus der eigentlichen Binomialverteilung die gaußsche Glockenkurve der Normalverteilung entsteht.

Das Galtonbrett wurde von dem britischen Naturforscher und Universalgelehrten Sir Francis Galton (1822–1911) erfunden. Galton war ein Cousin von Charles Darwin und interessierte sich stark für die Vererbung menschlicher Eigenschaften, wie Körpergröße oder Intelligenz [buchter`elementare`2005]. Er stellte auch fest, dass diese Eigenschaften in einer Bevölkerung fast immer einer Glockenkurve der Normalverteilung folgten. Galton suchte nach einem mechanischen Weg, um zu demonstrieren, wie die Vermischung vieler zufälliger genetischer Beiträge der Eltern in der nächsten Generation wieder genau dieselbe Verteilung von Mustern hervorbringt [pearl-mackenzie-2018]. Das Brett diente ihm also ursprünglich als biologisches Analogiemodell für die Vererbung, bevor es zu einem Standardwerkzeug der mathematischen Didaktik wurde, um den zentralen Grenzwertsatz zu visualisieren. Das erste Mal hat Sir Francis Galtin das Brett am 17.02.1874 bei einer Vorlesung in der Royal Society vorgestellt [kit-2022].

Das grundlegende Prinzip des Galtonbretts ist über die 150 Jahre hinweg völlig gleichgeblieben, doch seine Anwendung und Form haben sich stark gewandelt.

- Der Anfang in den 1870er Jahren mit Galtons originalem Apparate war nicht viel mehr als ein klobiger, hölzerner Kästen mit Glasscheiben. Als „Kugeln“ verwendete er oft Bohnen (weshalb es im Englischen auch Bean Machine genannt wurde).
- Im 20ten Jahrhundert fand das mathematische Prinzip schnell Einzug in die Unterhaltungsindustrie. In Fernsehshows wurde es weltberühmt – so etwa als das Spiel „Plinko“ in der US-amerikanischen Show The Price Is Right [pearl-mackenzie-2018] oder in der deutschen Adaption „Der Preis ist heiß“.
- Heute gibt es das Galtonbrett als präzise gefertigte Schreibtisch-Gadgets im Taschenformat, bei denen Tausende winziger Stahlkugeln in lasergeschnittenen Kunststofffrillen laufen. Zudem wird das Brett heute in Schulen und Universitäten meistens digital als Computersimulation wie bei [Galtonbrett mit variabler Wahrscheinlichkeit – GeoGebra](#) oder [Galtonbrettsimulation](#) genutzt, bei der man Parameter, wie die Fallwahrscheinlichkeit nach links oder rechts, flexibel verändern kann.

5 Arbeitsmaterialien

Stellen Sie Ihre Arbeitsmaterialien hier dar.

Dies ist der zweitwichtigste Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) auch den zweitgrößten Teil des Dokuments ausmachen. Da Arbeitsmatieralien inhaltlich sehr unterschiedlich sind, ist es schwierig, hier genaue Vorgaben zu machen. Eine Bastelanleitung mit Bastelbögen hätte ja z.B. eine ganz andere Struktur als eine Sammlung von Aufgaben und kann schnell ein paar Seiten umfassen...

Falls Sie Arbeitsmaterialien in separaten Dokumenten haben, erstellen Sie hier zumindest eine kurze Beschreibung der entsprechenden Materialien.

Ein paar Anregungen für die Arbeitsmaterialien (kommt natürlich auf das Thema an):

- Aufgaben

- Musterlösungen bzw. Lösungsskizzen
- Knobeleien
- Basteleien

Bitte bedenken Sie, zumindest Lösungsskizzen zu den Aufgaben zu geben! Besser noch vollständige Musterlösungen. Als Lehrkraft ist es nicht immer einfach, die Lösungen schnell zu finden und das Dokument soll ja den Lehrkräften die Arbeit erleichtern.

6 Zeitplan

Hier ist kein minutengenaue Zeitplan nötig, aber eine grobe Übersicht über den Zeitplan ist sinnvoll. Insbesondere, wie viel Zeit Sie für die einzelnen Themen bzw. Arbeitsmaterialien veranschlagen.

Das ganze muss nicht in eine Doppelstunde passen, aber es ist sinnvoll, wenn Sie die normalen Doppelstunden als grobe Richtlinie verwenden. Der Zeitplan kann z.B. gerne als eine Tabelle dargestellt werden.

7 Weiterführende Ideen

Da Sie ja umfangreich recherchiert haben, werden Sie deutlich mehr Material haben, als Sie in diesem Dokument unterbringen können. Hier können Sie Ihre weiterführenden Ideen kurz darstellen. Vergessen Sie nicht, auch hier die Quellen anzugeben!

8 Einordnung in den Lehrplan

Ein erster Kontakt mit der Binomialverteilung tritt in Form von Binomialkoeffizienten in der zehnten Klasse des Gymnasiums als Teil der Niveaustufe H auf ([lisum-2023]).

Vertieft wird die Binomialverteilung dann im zweiten Semester der Oberstufe und wird im vierten Semester durch die Normalverteilung ergänzt ([lisum-2022]).

A Anhang 1

Hier können Sie weitere Materialien, die für die Bearbeitung des Themas relevant sind, bereitstellen. Das können zum Beispiel Arbeitsblätter, Übungsaufgaben, Lösungen, weiterführende Literatur oder auch Links zu Online-Ressourcen sein.

B Anhang 2

Wenn Sie verschiedene Materialien bereitstellen möchten, können Sie auch mehrere Anhänge erstellen. Achten Sie darauf, dass die Materialien gut strukturiert und leicht zugänglich sind, damit sie später gut nutzbar sind.