

## Beispiel Titel

Fierke, E. & Janik, T. & Weidlich, L.  
Seminar Erweitertes Fachwissen - Mathe Club

Sommersemester 2026

### Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kernideen	2
3	Stichworte	2
4	Mathematischer Hintergrund	2
4.1	Mathematischer Teil auf Hochschulniveau . . . . .	2
5	Arbeitsmaterialien	6
6	Zeitplan	7
7	Weiterführende Ideen	7
8	Einordnung in den Lehrplan	7
A	Anhang 1	7
B	Anhang 2	7

### 1 Einleitung

**Wichtig:** Dieses Dokument hier soll nicht mehr als 30 Seiten umfassen (mehr bitte nur nach Absprache).

Ziel des Seminars ist die Ausarbeitung eines „rundum-sorglos-Pakets“ für eine Einheit in einem Matheclub, einer Mathe-AG oder einer ähnlichen Veranstaltung an einem Gymnasium. Unter einer Einheit ist nicht zwingend eine Doppelstunde zu verstehen, aber eine Doppelstunde soll mindestens mit Inhalt gefüllt werden.

Besonders wichtig ist es die folgenden Punkte zu beachten:

1. Es handelt sich um ein Zusatzangebot (Freizeit!) für die Schülerinnen und Schüler. Der Spaß an der Mathematik darf also auf keinen Fall zu kurz kommen.
2. Mathclubs sind in der Regel nach Jahrgängen aufgeteilt. Bei uns sollen als Zielgruppe die Klassenstufen 9-12 angenommen werden. Wählen Sie sinnvoll eine Klassenstufe aus, für die sich ihr Thema eignet. Welche Voraussetzungen bringen die Schülerinnen und Schüler mit?
3. Gehen Sie davon aus, dass Sie es mit motivierten Schülerinnen und Schülern zu tun haben. Die Kinder erwarten klare Argumente, Beweise, etc., die auch über den Lehrplan (deutlich) hinaus gehen.
4. Überlegen Sie, woran Sie Spaß hätten. Seien Sie kreativ!

Wir wollen eine Datenbank für Mathe-Clubs aufbauen. Daher ist eine einheitliche Struktur aller Datensätze zwingend erforderlich. Es sind somit einige technische Punkte zu beachten:

- Halten Sie sich bitte streng an die vorgegebene Latex-Vorlage (inklusive Ordner- und Dateistruktur).

Die Einleitung soll einen kurzen Überblick über den Inhalt des Dokuments geben. Sie soll den Leser neugierig machen und ihn dazu bringen, weiterzulesen. Hier gehören gegebenenfalls (nicht zwingend notwendig!) auch eine geschichtliche Einordnung und Anekdoten hinein (als Unterkapitel).

## 2 Kernideen

Ziel des Kapitels ist es, der Leserschaft auf einen Blick die zentralen Ideen zu präsentieren. Beschreiben Sie hier also knapp die mathematische Fragestellung. Es soll klar der mathematische Rahmen umrissen werden und die Fragestellung in den größeren Kontext eingeordnet werden.

Falls es einen zentralen Satz gibt, der die Fragestellung beantwortet, dann kann dieser hier auch genannt werden (auch wenn er später nochmal auftaucht und bewiesen wird).

Ansonsten soll die Fragestellung zwar klar umrissen werden, aber eher informell beschrieben werden.

## 3 Stichworte

Hier kommt eine Liste der relevanten **Stichworte** hin. Die Stichworte sollen mindestens die folgenden Inhalte abdecken:

- Stichworte zur Fragestellung
- Mathematische Themen- bzw. Fachgebiete
- Ungefähr passende Klassenstufen
- Welche fundamentalen Ideen werden behandelt?

## 4 Mathematischer Hintergrund

Dies ist der zentrale Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) den größten Teil des Dokuments ausmachen.

### 4.1 Mathematischer Teil auf Hochschulschulniveau

Das Galton-Brett (nach Francis Galton) dient der Veranschaulichung der Binomialverteilung und der experimentellen Bestätigung vom Zentralen Grenzwertsatz im Spezialfall der Binomialverteilung. Im Folgenden formalisieren wir den Weg einer Kugel durch das Brett als stochastischen Prozess als Binomialverteilung und Beweisen anschließend den Zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace.

#### Definition 4.1.1: Modell des Galton Brett

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.  
 Der Fall einer Kugel durch ein Galton-Brett mit  $n \in \mathbb{N}$  Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , wobei  $X_i \in \{0, 1\}$ . Dabei beschreibt  $X_i = 1$  **den Fall nach rechts** in der  $i$ -ten Reihe und  $X_i = 0$  **den Fall nach links**. Die Wahrscheinlichkeit sei

$P(X_i = 1) = p$  und  $P(X_i = 0) = 1 - p = q$ . Bei einem symmetrischen Brett gilt  $p = q = 0.5$ .

Hierbei ist anzumerken, dass jedes  $X_i$  Bernoulliverteilt ist, da

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{und} \quad P(X_i = x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = 1 \\ 1 - p & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Somit lässt sich auch  $X_i \sim \mathcal{B}_{0,5}$  schreiben.

Um jeden Ausgang des Galton-Brettes durchnummeriert von links nach rechts unterscheiden zu können, definieren wir uns eine weitere Zufallsvariable  $S_n$  wie folgt:

#### Definition 4.1.2: Zufallsvariable $S_n$

Die Endposition der Kugel im Fach  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  wird durch die Summe der Rechtsabbiegungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Anschließend ist folgendes zu bemerken:

#### Satz 4.1.3: Verteilung der Endposition

Die Zufallsvariable  $S_n$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Daher gilt  $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$

*Beweis.* Nach Definition 4.1.1 und Definition 4.1.2 ist  $S_n$  die Summe von  $n$  unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen  $X_i \sim \mathcal{B}_p$ . Also stellt  $S_n$  die Anzahl der Erfolge von  $n$ -Wiederholungen von unabhängigen identisch Bernoulli-verteilten Zufallsexperimenten dar. Daraus folgt, dass das Galton-Brett mit der Zufallsvariable  $S_n$  eine Binomialmodell darstellt und somit die Binomialverteilung nach Definition eine Zähldichte definiert. Daher gilt:  $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$   $\square$

Anhand des Galton-Brettes lässt sich nun wie bereits beschrieben leicht erkennen, dass bei  $n \rightarrow \infty$  Kugeln sich die Verteilung der Kugeln in der Auffangung der Verteilung der Glockenkurve der Normalverteilung annähert.

#### Satz 4.1.4: Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei  $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$  die Anzahl der Erfolge bei  $n$  unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  und sei  $q = 1 - p$ . Für große  $n$  lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass  $S_n$  genau den Wert  $k$  annimmt, durch die Dichtefunktion der Normalverteilung annähern:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right)$$

*Beweis.* Der Beweis basiert im Wesentlichen auf drei Approximationen: Der Stirling-Formel für die Fakultäten, der Vereinfachung der Wurzelausdrücke für große  $n$  sowie der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus zur Herleitung der Exponentialfunktion. Diese 3

Approximationen werden in diesem Beweis als wahr angenommen, jedoch in der Folgenden Arbeit weiter analysiert und bewiesen.

### 1. Anwendung der Stirling-Formel:

Wir beginnen mit der Definition der Binomialwahrscheinlichkeit:

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nach der Stirling-Formel gilt für große Zahlen näherungsweise  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . Ersetzen wir  $n!$ ,  $k!$  und  $(n-k)!$  durch diese Näherung:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k) (\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{(n-k)}{e}\right)^{(n-k)})} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{k^k \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^k \cdot n^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k} \sqrt{(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (3)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (1) Hier heben sich die  $e$ -Potenzen heraus, da  $\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n \cdot e^{-n}$  sowie  $e^n / (e^k e^{n-k}) = 1$  gilt.
- (2) Hier lässt sich die Gleichung intelligent aufteilen und etwas umstellen durch die Potenzgesetze, da gilt:  $n^n = n^k \cdot n^{n-k}$ . Außerdem lässt sich einmal  $\sqrt{2\pi}$  kürzen.
- (3) Ist das Resultat nach dem Sortieren der Brüche anhand der Exponenten

### 2. Substitution und Approximation der Wurzeln:

Um das breiter werden der Verteilung und das Abwandern des Erwartungswertes zu verhindern standardisieren wir die Zufallsvariable, indem wir

$$Z_n = \frac{S_n - E(X_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

definieren. Nun nimmt  $Z_n$  Werte  $z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$  an, nach  $k$  und nach  $n - k$  umgestellt heißt das

$$\begin{aligned} k &= np + x\sqrt{npq} \\ n - k &= nq - x\sqrt{npq} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir  $k \cdot (n - k)$  für  $n \rightarrow \infty$ :

$$k(n - k) = (np + x\sqrt{npq}) \cdot (nq - x\sqrt{npq}) \quad (4)$$

$$= n^2 pq + (nz\sqrt{npq}(q - p) - z^2 npq) \quad (5)$$

$$\stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} n^2 pq \quad (6)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (4) Formeln für  $k$  und  $n - k$  einsetzen
- (5) Distributivgesetz anwenden und nach Potenz von  $n$  sortieren

- (6)  $n^2$  geht für  $n \rightarrow \infty$  schneller nach unendlich als die linearen Restterme. Folglich sind diese für die Abschätzung gegen unendlich vernachlässigbar.

Setzen wir dieses Ergebnis nun in das Zwischenergebnis von Gleichung (3) ein erhalten wir folgendes:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n^2 pq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \quad (9)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (7) Approximation verwenden
- (8)  $n$  Kürzen und Potenz-/Wurzelgesetze anwenden um Bruch zu vereinfachen
- (9) Kehrwert der Brüche bilden und Wurzeln zusammenfassen

Es ist bereits der korrekte konstante Faktor der Gaußschen Glockenkurve erkennbar. **3. Taylor-Approximation des exponentiellen Teils:**

Den restlichen Term formen wir um, indem wir ihn logarithmieren um im Anschluss die Approximationsformel für den Logarithmus verwenden zu können. Diese wird ebenso wie die Sterling-Formel im Anschluss bewiesen. Hierzu betrachten wir folgendes zuerst einzeln:

$$\ln\left(\left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k}\right) \quad (10)$$

$$= -k \ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) \quad (11)$$

$$= (np + x\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{(np + x\sqrt{npq})}{np}\right) - (nq - x\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{(nq - x\sqrt{npq})}{nq}\right) \quad (12)$$

$$= (-np - x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \quad (13)$$

Die Taylor-Approximation besagt:  $\ln(1 - \alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$  und ein Rest, für den wir uns in dem Fall nicht interessieren, da wir die Approximation nach dem quadratischem Term abbrechen. Betrachten wir nun die Logarithmen für die Tailorapproximation näher:

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \approx x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2}{2}$$

$$= x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}$$

und für den anderen ln analog:

$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{\left(x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2}{2}$$

$$= -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}$$

Setzen wir dies nun zurück in Gleichung (13) ein, erhalten wir:

$$(-np - x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \quad (14)$$

$$(-np - x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}\right) + (-nq + x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}\right) \quad (15)$$

$$L = \ln\left(\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right) = -k \ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right)$$

Setzen wir unsere Substitution aus dem zweiten Schritt in die Argumente des Logarithmus ein, ergibt sich:

$$\frac{k}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}} \quad \text{und} \quad \frac{n-k}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Wir nutzen nun die quadratische Taylor-Approximation  $\ln(1+w) \approx w - \frac{w^2}{2}$ :

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \approx x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}$$

$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}$$

Nun setzen wir diese Näherungen zusammen mit unseren Ausdrücken  $k = np + x\sqrt{npq}$  und  $n-k = nq - x\sqrt{npq}$  wieder in  $L$  ein:

$$L \approx -(np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}\right)$$

Multipliziert man die Klammern in diesem Ausdruck aus und sortiert die Terme, so heben sich alle linearen Glieder gegenseitig auf. Unter Ausnutzung von  $p+q=1$  fassen sich die Vorfaktoren der verbliebenen quadratischen Terme zusammen, sodass als Endergebnis für den Logarithmus exakt Folgendes übrig bleibt:

$$L \approx -\frac{x^2}{2}$$

...

□

## 5 Arbeitsmaterialien

Stellen Sie Ihre Arbeitsmaterialien hier dar.

Dies ist der zweitwichtigste Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) auch den zweitgrößten Teil des Dokuments ausmachen. Da Arbeitsmaterialien inhaltlich sehr unterschiedlich sind, ist es schwierig, hier genaue Vorgaben zu machen. Eine Bastelanleitung mit Bastelbögen hätte ja z.B. eine ganz andere Struktur als eine Sammlung von Aufgaben und kann schnell ein paar Seiten umfassen...

Falls Sie Arbeitsmaterialien in separaten Dokumenten haben, erstellen Sie hier zumindest eine kurze Beschreibung der entsprechenden Materialien.

Ein paar Anregungen für die Arbeitsmaterialien (kommt natürlich auf das Thema an):

- Aufgaben
- Musterlösungen bzw. Lösungsskizzen
- Knobeleien
- Basteleien

Bitte bedenken Sie, zumindest Lösungsskizzen zu den Aufgaben zu geben! Besser noch vollständige Musterlösungen. Als Lehrkraft ist es nicht immer einfach, die Lösungen schnell zu finden und das Dokument soll ja den Lehrkräften die Arbeit erleichtern.

## **6 Zeitplan**

Hier ist kein minutengenauer Zeitplan nötig, aber eine grobe Übersicht über den Zeitplan ist sinnvoll. Insbesondere, wie viel Zeit Sie für die einzelnen Themen bzw. Arbeitsmaterialien veranschlagen.

Das ganze muss nicht in eine Doppelstunde passen, aber es ist sinnvoll, wenn Sie die normalen Doppelstunden als grobe Richtlinie verwenden. Der Zeitplan kann z.B. gerne als eine Tabelle dargestellt werden.

## **7 Weiterführende Ideen**

Da Sie ja umfangreich recherchiert haben, werden Sie deutlich mehr Material haben, als Sie in diesem Dokument unterbringen können. Hier können Sie Ihre weiterführenden Ideen kurz darstellen. Vergessen Sie nicht, auch hier die Quellen anzugeben!

## **8 Einordnung in den Lehrplan**

Ordnen Sie bitte Ihr Material kurz und prägnant in den Lehrplan ein. Das ist wichtig, damit die Lehrkräfte, die Ihr Material verwenden, auch wissen, wo sie es im Lehrplan finden können. Wichtig: Nicht mehr als eine halbe Seite! Das ist nur eine kurze Einordnung, keine vollständige Darstellung des Lehrplans.

### **A Anhang 1**

Hier können Sie weitere Materialien, die für die Bearbeitung des Themas relevant sind, bereitstellen. Das können zum Beispiel Arbeitsblätter, Übungsaufgaben, Lösungen, weiterführende Literatur oder auch Links zu Online-Ressourcen sein.

### **B Anhang 2**

Wenn Sie verschiedene Materialien bereitstellen möchten, können Sie auch mehrere Anhänge erstellen. Achten Sie darauf, dass die Materialien gut strukturiert und leicht zugänglich sind, damit sie später gut nutzbar sind.