

Das Galtonbrett und der zentrale Grenzwertsatz

Fierke, E. & Janik, T. & Weidlich, L.
Seminar Erweitertes Fachwissen - Mathe Club

Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kernideen	2
3	Stichworte	2
4	Mathematischer Hintergrund	3
4.1	Beweis des zentralen Grenzwertsatzes	3
4.2	Gamma-Funktion	11
4.3	Stirling-Approximation	12
4.4	Taylor-Approximation	15
4.5	Galtonbrett	18
5	Arbeitsmaterialien	19
6	Zeitplan	19
7	Weiterführende Ideen	20
8	Einordnung in den Lehrplan	21
A	Arbeitsblatt 1	22
B	Arbeitsblatt 2	26
C	Arbeitsblatt 3	28

1 Einleitung

Das Galtonbrett zählt zu den bekanntesten Demonstrationsmodellen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine Vielzahl kleiner Kugeln fällt durch ein regelmäßiges Gitter von Stiften, wobei an jedem Hindernis zufällig entschieden wird, ob die Kugel nach rechts oder nach links fällt. Das Galtonbrett verbindet aufgrund des entstehenden charakteristischen Musters trotz der Zufälligkeit jeder einzelnen Entscheidung auf anschauliche Weise Zufall und Gesetzmäßigkeit.

Aus mathematischer Sicht bildet das Galtonbrett die Binomialverteilung ab, wobei sich die Verteilung mit zunehmender Anzahl an Stiftreihen einer Normalverteilung annähert. Das Verhalten steht in engem Zusammenhang mit dem zentralen Grenzwertsatz. Zur Beschreibung dieser Annäherung spielen außerdem die Fakultätsfunktion sowie die zugehörige Approximation durch die Stirling-Formel eine wichtige Rolle.

Das Galtonbrett stellt einen hohen didaktischen Wert dar, indem es ein anschauliches Experiment zu Grundkonzepten der Stochastik und Analysis und deren Verknüpfung liefert. Das Modell eignet sich besonders für den Einsatz in der Sekundarstufe II in Mathe-AGs und -clubs, in denen über den Unterricht hinausgehende Inhalte behandelt werden können. Insbesondere die Verbindung von praktischem Experiment, Simulation und theoretischer

Herleitung ermöglicht einen vertieften Zugang zur Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ziel der Ausarbeitung ist es, die mathematischen Grundlagen des Galtonbretts auf Hochschulniveau darzustellen und deren Zusammenhänge verständlich herzuleiten. Anschließend werden diese Inhalte auf das mathematische Vorwissen der Klassenstufe 10 bis 12 übertragen und didaktisch aufbereitet. Die entstehenden Arbeitsmaterialien ermöglichen den Schüler*innen einen vertieften Einblick in die mathematischen Hintergründe des Galtonbretts.

2 Kernideen

In dieser Arbeit widmen wir uns der mathematischen Formalisierung eines faszinierenden Phänomens: Wie verteilen sich zufällige Ereignisse, wenn sie sehr oft wiederholt werden? Als anschauliches Modell dient uns hierfür das Galtonbrett, bei dem Kugeln an Hindernissen zufällig nach links oder rechts fallen.

Der mathematische Rahmen bewegt sich dabei im Übergang von der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie zur stetigen Analysis. Wir modellieren den Fall einer Kugel zunächst als Summe unabhängiger, identisch verteilter Bernoulli-Zufallsvariablen, was direkt zur Binomialverteilung führt. Da die direkten Berechnungen der Binomialkoeffizienten für eine große Anzahl an Reihen (für $n \rightarrow \infty$) aufgrund der Fakultäten extrem aufwendig werden, suchen wir nach einer asymptotischen Näherung. Außerdem ist es ein sehr schönes Resultat, dass aus einer Binomialverteilung eine Normalverteilung „entstehen“ kann.

Den größeren Kontext bildet die Verknüpfung grundlegender mathematischer Werkzeuge, um genau dies zu beweisen. Wir greifen auf die *Stirling-Approximation* (zur Näherung von Fakultäten) und die *Taylor-Entwicklung* (zur Approximation von Logarithmen) zurück. Diese analytischen Werkzeuge schlagen die Brücke zwischen der diskreten Welt des Pascalschen Dreiecks und der kontinuierlichen Welt der Exponentialfunktion.

Das Herzstück der Arbeit und die formale Antwort auf unsere Fragestellung bildet der *Zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace*. Er besagt, dass sich die diskrete Binomialverteilung für große n der stetigen Normalverteilung (der bekannten Gaußschen Glockenkurve) annähert.

Damit wird mathematisch präzise gezeigt, wie ein System aus einfachen, binären Entscheidungen (links oder rechts) bei ausreichend vielen Wiederholungen unweigerlich in ein universelles, kontinuierliches Verteilungsmodell mündet.

3 Stichworte

Die folgenden **Stichworte** decken in etwa den Inhalt des ausgearbeiteten Themengebietes ab:

- Stochastik
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace
- Stirling-Approximation
- Taylor-Entwicklung
- Pascalsches-Dreieck
- Gamma-Funktion

- Klasse 10 bis 12

4 Mathematischer Hintergrund

4.1 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Das Galtonbrett (nach Francis Galton) dient der Veranschaulichung der Binomialverteilung und der experimentellen Bestätigung vom zentralen Grenzwertsatz im Spezialfall der Binomialverteilung. Im Folgenden formalisieren wir den Weg einer Kugel durch das Brett als stochastischen Prozess mithilfe einer Binomialverteilung und beweisen anschließend den zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace [Nah15].

Definition 4.1.1: Modell des Galtonbretts

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der Fall einer Kugel durch ein Galtonbrett mit $n \in \mathbb{N}$ Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$, wobei $X_i \in \{0, 1\}$. Dabei beschreibt $X_i = 1$ **den Fall nach rechts** in der i -ten Reihe und $X_i = 0$ **den Fall nach links**. Die Wahrscheinlichkeit sei $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$. Bei einem symmetrischen Brett gilt $p = q = 0.5$.

nach [BH05, S. 252-253]

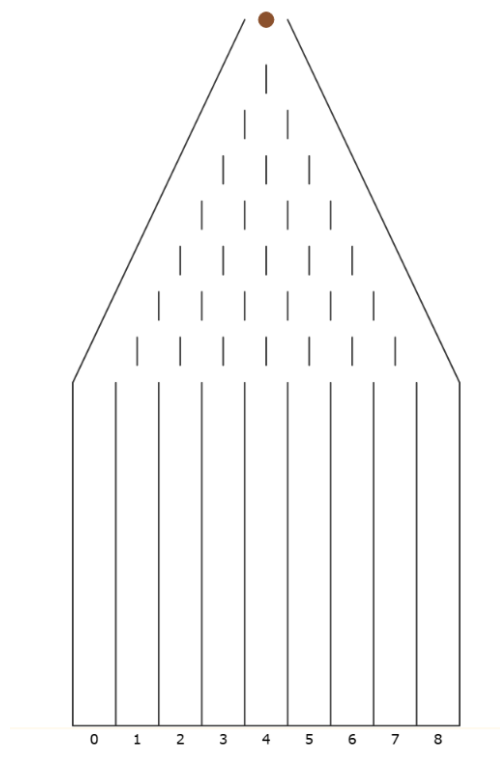


Abbildung 1: Darstellung des Galtonbretts nach [Arn25]

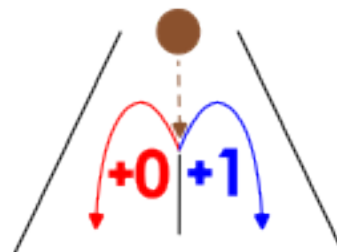


Abbildung 2: Darstellung der Zufallsvariable X_i im Kontext vom Galtonbrett

Bemerkung 4.1.2. X_i Bernoulliverteilt

Hierbei ist anzumerken, dass jedes X_i bernoulliverteilt ist.

Dies gilt, da

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{und} \quad P(X_i = x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = 1 \\ 1 - p & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Somit lässt sich auch $X_i \sim \mathcal{B}_p$ schreiben.

Um jeden Ausgang des Galtonbrettes durchnummeriert von links nach rechts unterscheiden zu können, definieren wir uns eine weitere Zufallsvariable S_n wie folgt:

Definition 4.1.3: Zufallsvariable S_n

Die Endposition der Kugel im Fach $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird durch die Summe der Rechtsabbiegungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

nach [And19, min. 0:50]

Um diese summierte Zufallsvariable genauer zu verstehen, betrachten wir zuerst den Binomialkoeffizienten.

Definition 4.1.4: Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

wobei die Zahl $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge, genau k -Elemente auszuwählen, angibt.

[Kos25]

Betrachten wir nun den Binomialkoeffizienten in Bezug auf S_n , beschreibt dieser exakt die Anzahl der möglichen Pfade durch das Galtonbrett, bei denen die Kugel von n Reihen genau k -mal nach rechts (und somit $(n-k)$ -mal nach links) fällt. Da jeder dieser einzelnen Pfade aufgrund der Unabhängigkeit der Entscheidungen die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$ besitzt, ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Fach k durch Multiplikation. Daher rührt die Binomialverteilung:

Definition 4.1.5: Binomialmodell

Wiederholt man ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ n -mal, und interessiert sich nur für die Anzahl der erfolgreichen Experimente, so wählt man

$$A = \{0, 1, \dots, n\}.$$

In diesem Modell ist

$$\text{Bin}_{n,p}(\{k\}) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

eine Zähldichte.

nach [Kos25]

Im Fall des Galtonbrettes können wir $A = S_n$ wählen.

Definition 4.1.6: Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Zähldichte $\text{Bin}_{n,p}(\{k\})$ auf $\{0, \dots, n\}$ heißt Binomialverteilung zu den Parametern n, p .

[Kos25]

Anschließend ist folgendes zu bemerken:

Satz 4.1.7: Verteilung der Endposition

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable S_n , lässt sich durch die Binomialverteilung beschreiben.

Daher gilt $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.1.2 und Definition 4.1.3 ist S_n die Summe von n unabhängigen Bernoulliverteilten Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{B}_p$. Also stellt S_n die Anzahl der Erfolge von n -Wiederholungen von unabhängigen identisch bernoulliverteilten Zufallsexperimenten dar. Daraus folgt, dass das Galtonbrett mit der Zufallsvariable S_n ein Binomialmodell nach Definition 4.1.5 darstellt und somit die Binomialverteilung nach Definition 4.1.6 eine Zähldichte definiert. Daher gilt: $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$. $\square$

Eine weitere in diesem Kontext interessante Verteilung ist die Normalverteilung.

Definition 4.1.8: Normalverteilung

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, wobei μ den Erwartungswert und σ^2 die Varianz von X darstellt, so nennt man X *Normalverteilt* und schreibt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Die Dichte der Normalverteilung wird auch "Gauß'sche Glockenkurve" genannt.

[Kos25]

Es ist mathematisch gesehen sehr schön zu sehen, wie eine relativ einfache diskrete Verteilung, wie die Binomialverteilung, mit einer mathematisch per se sehr anders aussehenden Verteilung zusammenhängt. Im Spezialfall der Binomialverteilung wird dies durch den Lokalen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace formalisiert [Nah15; And19].

Satz 4.1.9: Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und sei $q = 1 - p$. Dann gilt bei einem beliebigen $c > 0$ mit $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k: |z| \leq c} \left| \frac{P(S_n = k)}{f_N(\mu, \sigma^2)}(k) \right| = 1$$

nach [georgii'stochastik'2015]

In der Literatur wird allgemein vom Satz von Moivre-Laplace gesprochen, wenn die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung gemeint ist [And19]. Mathematisch präzise muss jedoch zwischen dem globalen und dem lokalen Grenzwertsatz unterschieden werden [georgii'stochastik'2015; Kos25]. Wir beweisen im Folgenden den lokalen Grenzwertsatz, der das (lokale) Annähern des "oberen Randes" des Histogramms der Binomialverteilung an die Glockenkurve beschreibt [georgii'stochastik'2015]. Hierbei wird *nicht* die Approximation der Binomial durch die Normalverteilung bewiesen.

Beweis. Der Beweis folgt zum großen Teil dem Beweis von [And19] und wurde von den Autoren aufgrund der Konkretisierung des Satzes [georgii'stochastik'2015] weiter konkretisiert.

Der Beweis basiert im Wesentlichen auf drei Approximationen: Der Stirling-Formel für die Fakultäten, der Vereinfachung der Wurzelausdrücke für große n , sowie der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus zur Herleitung der Exponentialfunktion. Diese drei Approximationen werden in diesem Beweis als wahr angenommen, jedoch in der folgenden Arbeit weiter analysiert und bewiesen.

Sei $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ durch c begrenzt sowie $\mathbb{E}(S_n) = \mu$, $\text{Var}(S_n) = \sigma^2 < \infty$.

1. Anwendung der Stirling-Formel:

Wir beginnen mit der Definition der Binomialwahrscheinlichkeit:

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nach Satz 4.3.1 gilt für große Zahlen näherungsweise $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ersetzen wir $n!$, $k!$ und $(n-k)!$ durch diese Näherung:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k) (\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{(n-k)})} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{k^k \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^k \cdot n^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k} \sqrt{(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (3)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (1) Hier heben sich die e -Potenzen heraus, da $\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n \cdot e^{-n}$ sowie $e^n / (e^k e^{n-k}) = 1$ gilt.

- (2) Hier lässt sich die Gleichung intelligent aufteilen und etwas umstellen durch die Potenzgesetze, da gilt: $n^n = n^k \cdot n^{n-k}$. Außerdem lässt sich einmal $\sqrt{2\pi}$ kürzen.
- (3) Ist das Resultat nach dem Sortieren der Brüche anhand der Exponenten.

2. Substitution und Approximation der Wurzeln:

In diesem Teil des Beweises werden O-Notationen verwendet und ein grundlegendes Verständnis dieser vorausgesetzt.

Um das Breiterwerden der Verteilung und das Abwandern des Erwartungswertes zu verhindern standardisieren wir die Zufallsvariable, indem wir

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

definieren. Nun nimmt Z_n Werte $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ an, nach k umgestellt heißt das

$$k = np + z\sqrt{npq}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $-(1)$ und addiert man n erhält man einen ähnlichen Ausdruck für $n - k$:

$$n - k = nq - z\sqrt{npq}$$

Nun betrachten wir $k \cdot (n - k)$ für $n \rightarrow \infty$:

$$k(n - k) = (np + z\sqrt{npq}) \cdot (nq - z\sqrt{npq}) \quad (4)$$

$$= n^2pq + (nz\sqrt{npq})(q - p) - z^2npq \quad (5)$$

$$= n^2pq + O(n) \quad (6)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (4) Die Formeln für k und $n - k$ einsetzen.
- (5) Das Distributivgesetz anwenden und nach der Potenz von n sortieren.
- (6) n^2 geht für $n \rightarrow \infty$ schneller nach unendlich als die linearen Restterme. Folglich sind diese für die Abschätzung gegen unendlich im folgenden vernachlässigbar.

Setzen wir dieses Ergebnis nun in das Zwischenergebnis von Gleichung (3) ein, so erhalten wir folgendes:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n^2pq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \quad (9)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (7) Die Approximation verwenden.
- (8) n kürzen und die Potenz-/Wurzelgesetze anwenden, um den Bruch zu vereinfachen.
- (9) Den Kehrwert der Brüche bilden und die Wurzeln zusammenfassen.

Es ist bereits der korrekte konstante Faktor der gaußschen Glockenkurve erkennbar.

3. Taylor-Approximation des exponentiellen Teils:

Den restlichen Term formen wir um, indem wir ihn logarithmieren, um im Anschluss die Approximationsformel für den Logarithmus verwenden zu können. Diese wird ebenso wie die Stirling-Formel im Anschluss bewiesen. Hierzu betrachten wir folgendes zuerst einzeln:

$$\ln \left(\left(\frac{k}{np} \right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq} \right)^{-n+k} \right) \quad (10)$$

$$= -k \ln \left(\frac{k}{np} \right) - (n-k) \ln \left(\frac{n-k}{nq} \right) \quad (11)$$

$$= -(np + z\sqrt{npq}) \ln \left(\frac{(np + z\sqrt{npq})}{np} \right) - (nq - z\sqrt{npq}) \ln \left(\frac{(nq - z\sqrt{npq})}{nq} \right) \quad (12)$$

$$= (-np - z\sqrt{npq}) \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}} \right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \quad (13)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

(10) Den Logarithmus anwenden.

(11) Logarithmengesetze für Potenzen anwenden.

(12) Gleichheit für k aus der Standardisierung einsetzen: $k = np + z\sqrt{npq}$.

(13) Distributivgesetz für -1 anwenden und Brüche durch Aufteilen der Addition und Einfügen der multiplikativen Identität $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{np}}$ (selbes für nq) vereinfachen.

Die Definition 4.4.4 beweist die Taylor-Approximation für den Logarithmus: $\ln(1 - \alpha) = -\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$ und $\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$ für $\alpha \in (-1, 1)$. Hierbei steht $O(\alpha^3)$ für die Landau-Notation. Wir definieren:

$$\beta := \sqrt{\frac{q}{np}}; \quad \gamma := \sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Um diese Approximation zu verwenden, muss sicher sein, dass $-1 < \alpha < 1$. Das heißt, dass $\forall z \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} -1 < z \cdot \beta < 1$. (Für $z \cdot \gamma$ analog) Hierbei genügt die Abschätzung gegen unendlich, da wir die Annäherung nur für große Zahlen beweisen wollen.

Sei also $z \in \mathbb{N}$, dann betrachten wir:

$$z \cdot \beta \stackrel{Def.}{=} z \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} = z \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und $-1 < 0 < 1$

Da p und q konstante Parameter sind.

Betrachten wir nun die Logarithmen für die Taylor-Approximation näher:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}} \right) &\sim z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{q}{np}} \right)^2}{2} + O((z\beta)^3) \\ &= z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2 q}{2np} + O((z\beta)^3) \end{aligned}$$

und für den anderen $\ln$ analog:

$$\ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \sim -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{p}{nq}} \right)^2}{2} + O((-z\gamma)^3)$$

$$= -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2 p}{2nq} + O((z\gamma)^3) \quad \text{"-" fällt wegen O weg}$$

Setzen wir dies nun zurück in Gleichung (13) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (-np - z\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \\ &= (-np - z\sqrt{npq})\left(z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2 q}{2np} + O((z\beta)^3)\right) \\ & \quad + (-nq + z\sqrt{npq})\left(-z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2 p}{2nq} + O((z\gamma)^3)\right) \\ &= (-npz\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{npz^2 q}{2np} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{q}{np}} + O((z\beta)^3)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ & \quad + (nqz\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{nqz^2 p}{2nq} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{p}{nq}} + O((z\gamma)^3)) \\ & \quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \sim (-z\sqrt{\frac{(np)^2 q}{np}} + \frac{z^2 q}{2} - z^2\sqrt{\frac{npq^2}{np}} + O((z\beta)^3)) \\ & \quad + (z\sqrt{\frac{(nq)^2 p}{nq}} + \frac{z^2 p}{2} - z^2\sqrt{\frac{np^2 q}{nq}} + O((z\gamma)^3)) \\ & \quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= (-z\sqrt{npq} - z^2 q + \frac{z^2 q}{2} + O((z\beta)^3)) + (z\sqrt{npq} - z^2 p + \frac{z^2 p}{2} + O((z\gamma)^3)) \\ & \quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sim (-z\sqrt{npq} - \frac{z^2 q}{2}) + (z\sqrt{npq} - \frac{z^2 p}{2}) \quad (17)$$

$$= -\frac{z^2 q}{2} - \frac{z^2 p}{2} = -\frac{z^2}{2}(p + q) \quad (18)$$

$$= -\frac{z^2}{2} \quad (19)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (14) Das Distributivgesetz anwenden. Alle Terme die zu $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ passen, werden nach dessen Definition „absorbiert“.
- (15) np und nq mithilfe des Quadrates in die Wurzel ziehen, sowie Kürzen und Wurzeln zusammenfassen. Außerdem gilt trivialerweise, dass $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- (16) np und nq in den Wurzeln Kürzen und Kommutativgesetz anwenden.
- (17) Die Landau Terme können vernachlässigt werden, da diese Terme für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, da z beschränkt ist. Betrachte Hierzu Lemma 4.1.10 und Proposition 4.1.11.
- (18) $-z\sqrt{npq} + z\sqrt{npq} = 0$ und Distributivgesetz (invers) anwenden.
- (19) Es gilt $p + q = 1$, da $q = 1 - p$ definiert wurde.

Da $e^{ln(l)} = l$ setzen wir nun $e^{-\frac{z^2}{2}}$ in Gleichung (9) ein, kommen wir zum finalen Ergebnis:

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (22)$$

$$= f_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(k) \quad (23)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

(20) Rücksubstitution der Standardisierung.

(21) Der Bruch wurde quadriert und zusammengefasst.

(22) Definition von μ und σ angewendet.

(23) Definition der Dichtefunktion angewendet.

Da wir hiermit gezeigt haben, dass $P(S_n = k) \sim f_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(k)$ für alle k gilt, deren standardisierte Abweichung z beschränkt bleibt ($|z| \leq c$), folgt daraus direkt die asymptotische Gleichheit. Das bedeutet für den Quotienten aus exakter Wahrscheinlichkeit und approximierter Dichte, dass er im betrachteten Intervall gleichmäßig gegen 1 konvergiert.

Zusammenfassend lässt sich festhalten: Die Zähldichte einer binomialverteilten Zufallsvariable nähert sich für $n \rightarrow \infty$ im Bereich um den Erwartungswert punktweise der Dichtefunktion der Normalverteilung an. $\square$

Lemma 4.1.10: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme mit Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ Werte einer standardisierten, binomialverteilten Zufallsvariable wobei z durch ein c begrenzt ist. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus multipliziert mit ihren jeweiligen Vorfaktoren gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei $\beta := \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma := \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

Beweis. Da z begrenzt ist, gilt: $|z| < c$. Wir betrachten exemplarisch den ersten Summanden (der zweite Verhält sich vollkommen analog). Da $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$, verhält sich der Restterm dritter Ordnung bezüglich n wie folgt:

$$O((z\beta)^3) = O\left(z^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3\right) = O\left(\frac{c^3 q^{3/2}}{p^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\right) = O(n^{-3/2})$$

Nach der Definition der Landau-Notation existiert für hinreichend große n eine Konstante $M > 0$, sodass der Betrag dieses Restterms durch $M \cdot n^{-3/2}$ nach oben beschränkt ist. Multiplizieren wir dies mit dem Betrag des Vorfaktors, erhalten wir mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \left|(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O(n^{-3/2})\right| &\leq (np + |z|\sqrt{npq}) \cdot M \cdot n^{-3/2} \\ &= M \cdot np \cdot n^{-3/2} + M \cdot |z|\sqrt{npq} \cdot n^{-3/2} \end{aligned}$$

$$= M \cdot p \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + M \cdot |z| \sqrt{pq} \cdot \frac{1}{n}$$

Da M, p, q und z in diesem Fall von n unabhängige Konstanten sind und n im Nenner unbegrenzt wächst, strebt dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen:

$$0 + 0 = 0$$

Für den zweiten Term mit γ erfolgt der Beweis völlig analog, womit die Summe beider Terme ebenfalls gegen 0 konvergiert. $\square$

Folgende Proposition ist leicht aus dem oberen Beweis ableitbar (aufgrund der Abschätzung mit $n^{-3/2}$ und der Betrachtung von z als beschränkt) und wird daher nicht separat bewiesen.

Proposition 4.1.11: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme ohne Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und z Werte einer standardisierten, binomialverteilten Zufallsvariable wobei z durch ein c begrenzt ist. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$O((z\beta)^3) + O((z\gamma)^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma = \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

4.2 Gamma-Funktion

Zur nachfolgenden Betrachtung und des Beweises der Stirling-Approximation benötigen wir die Gamma-Funktion, auch **Eulersches Integral zweiter Gattung** genannt. Sie erweitert die Fakultätsfunktion von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf reelle und komplexe Zahlen (mit einigen Ausnahmen). Hier betrachten wir der Einfachheit halber nur die Gamma-Funktion in $\mathbb{R}$.

Definition 4.2.1: Gamma-Funktion

Sei $x > 0 \in \mathbb{R}$, dann ist die **Gamma-Funktion** definiert durch

$$\begin{aligned} \Gamma(x) : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

[Nie06, Kap. XI, S. 142]

Die Gamma-Funktion berechnet wie folgt die Fakultät in $\mathbb{N}$:

Satz 4.2.2: Vergleich mit der Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Ein Beweis hierzu befindet sich in [forster`analysis`2023].

4.3 Stirling-Approximation

Die Stirling-Approximation ist eine mathematische Näherung zur Berechnung der Fakultät einer Zahl. Die Approximation ist vorallem in der Stochastik und der statistischen Physik ein unverzichtbares Werkzeug. Wir schauen sie daher im Folgenden im Detail an.

Satz 4.3.1: Stirlingformel

Für $n \mapsto \infty$ gilt nach STIRLINGS Approximation, dass

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

[FB95]

Beweis. Der Ausdruck aus dem Satz 4.3.1 ist äquivalent zu

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n$$

Sei nun

$$d_n := \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$$

Wir zeigen nun, folgende Aussage gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \ln \sqrt{2\pi}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \ln n! - \ln(n+1)! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\ &\quad + \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + n - (n+1) \\ &= \ln \frac{n!}{(n+1)!} + \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n+1) - 1 \\ &= -\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} + \ln(n+1) - 1 \\ &= \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \\ &= (2n+1) \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} - 1 \end{aligned}$$

Wegen der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus gilt für $-1 < x < 1$ gilt allgemein

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} \\ \ln(1-x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(-x)^i}{i} \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

Setze $x := \frac{1}{2n+1}$, daraus folgt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \left(x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1} \right) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \quad \text{mit } q = \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} \end{aligned}$$

Zudem ist ebenfalls

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1}$$

also

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} &= \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \\ \frac{1}{3(2n+1)^2} &= \frac{1}{12n(n+1) + 3} = \frac{1}{12(12n(n+1) + 3)} \\ &= \frac{12}{12 \cdot 12n(n+1) + 36} \\ &> \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 12n + 24n + 13} \\ &= \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 14n + 13} = \frac{12}{(12n+1)(12n+13)} \\ &= \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \end{aligned}$$

Setzen wir beide Ungleichungen zusammen, so erhalten wir

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

Aus

$$\begin{aligned} &\left(d_n - \frac{1}{12n} \right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} \right) \\ &< 0 < \left(d_n - \frac{1}{12n+1} \right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \right) \end{aligned}$$

folgt, dass die Folge $\left\{d_n - \frac{1}{12n+1}\right\}$ monoton fallend, die Folge $\left\{d_n - \frac{1}{12n}\right\}$ monoton wachsend ist. Beide Folgen haben dabei den Grenzwert $c := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$.

$$\begin{aligned} d_n - \frac{1}{12n} &< c < d_n - \frac{1}{12n+1} \\ c + \frac{1}{12n+1} &< d_n < c + \frac{1}{12n} \end{aligned}$$

Aus unserem Start

$$d_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$$

folgt nun

$$e^{d_n} = n! \left(\frac{n}{e}\right)^{-1} n^{-\frac{1}{2}}$$

An dieser Stelle notieren wir

$$\begin{aligned} e^{c + \frac{1}{12n+1}} &< e^{d_n} < e^{c + \frac{1}{12n}} \\ e^c e^{\frac{1}{12n+1}} &< n! \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} < e^c e^{\frac{1}{12n}} \\ e^c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} &< n! < e^c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \end{aligned}$$

Die Ungleichung bleibt aufgrund der Monotonie der e -Funktion bestehen. Es bleibt zu zeigen, dass

$$e^c = \sqrt{2\pi}$$

Wir führen eine Hilfsrechnung über

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Es gilt

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx \\ &= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \\ &\quad \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} \cos x \cdot (-\cos x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_0 &= \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= 1 \\ I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$I_{2n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow & 0 < \sin x < 1 \\ \Rightarrow & \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \\ \Rightarrow & I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1} \\ \Rightarrow & \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1 \\ \Rightarrow & \frac{2n+1}{2n} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} > 1 \\ \Rightarrow & \lim \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \\ \Rightarrow & \frac{\pi}{2} = \lim \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \\ & = \lim \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} \end{aligned}$$

Es ist also für zwei gegen 0 konvergierende Terme $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$:

$$\begin{aligned} n! &= e^c \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{\alpha_n} \\ (2n)! &= e^c \sqrt{2n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} e^{\beta_n} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert schlussendlich

$$e^c = \sqrt{2\pi}$$

□

Der Beweis entspricht im wesentlichen dem 2006 von Wolfgang Kössler geführten Beweis, siehe [Kös06].

4.4 Taylor-Approximation

Um eine Taylorapproximation für eine Funktion zu finden, müssen wir zunächst nachweisen, dass die Funktion die wir approximieren wollen, $(n+1)$ -mal differenzierbar ist. Da wir unsere Approximation nach dem quadratischen Term abbrechen werden genügt es zu zeigen, dass $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar ist. Da $\ln(1-x)$ sogar unendlich oft differenzierbar ist, ist diese Aussage trivial.

Proposition 4.4.1

$f(x) = \ln(1-x)$ ist mindestens dreimal differenzierbar.

Bevor wir die Approximation nachweisen, ist eine formale Definition des Satzes von Taylor und dem Taylorpolynom nötig, wobei letzteres aus dem Satz von Taylor folgt.

Satz 4.4.2: Satz von Taylor

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in [a, b]$.

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Es existiert ein (von x abhängiges $\xi \in I(x_0, x)$), sodass für das Lagrange-Restglied gilt:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

[End24]

Bemerkung 4.4.3

Das Lagrange-Restglied ist in den meisten Fällen eine Funktion vom Grad $n + 1$, aufgrund des letzten Faktors. Es kann aber auch sein, dass das Lagrange-Restglied das Nullpolynom ist, je nach Wahl von ξ und der Auswertung von der $n + 1$ -ten Ableitung von f an der Stelle ξ .

Dadurch können wir das Restglied auch auffassen als ein Element von $O(x^{n+1})$. Nach der Definition der Landaunotation gilt: für alle $a, b \in \mathbb{R} : a * x^n + b$ liegt in $O(x^n)$. Man kann somit das Landausymbol O als Ansammlung von Funktionen verstehen. Interessanterweise gilt auch eine Relation zwischen den einzelnen „Landaumengen“. Für alle $n \in \mathbb{N} : O(x^n)$ ist in $O(x^{n+1})$. In der Informatik wird diese Notation genutzt, um asymptotische Verhalten von beispielsweise Laufzeiten zu beschreiben. „Algorithmus A braucht asymptotisch so viel Zeit in Abhängigkeit von der Eingabe, wie eine x^n -Funktion“.

Die Definition des Taylorpolynoms entspringt direkt dem Satz von Taylor, nur ohne das Lagrange-Restglied.

Definition 4.4.4: Taylorpolynom

$$T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

[End24]

Bemerkung 4.4.5

Der Satz von Taylor liefert eine lokale Approximation an eine Funktion f durch das Taylorpolynom.

Nun können wir unsere Approximation von $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ zeigen.

Lemma 4.4.6

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Beweis. Zunächst ist der Definitionsbereich von $\ln(1-x)$ gleich dem Intervall $(-\infty, 1)$. Zudem ist die Funktion $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar. Betrachten wir $x \in (-\infty, 1)$ und $x_0 = 0$.

Das zweite Taylor-Polynom lautet

$$\begin{aligned} T_{\ln(1-x),0,2}(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \cdot (\ln(1-x_0))^{(k)} (x-x_0)^k \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \ln(1) \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot (\ln(1))^{(1)} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (\ln(1))^{(2)} \cdot x^2 \quad \text{Proposition 4.4.1} \\ &= 0 + 1 \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot x^2 \\ &= -x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Taylor (Satz 4.4.2) folgt somit:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

wobei das Lagrange-Restglied etwa $R_2(x) \sim O(x^3)$, denn

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{1}{(2+1)!} \cdot (\ln(1-\xi))^{(2+1)} \cdot (x-0)^{(2+1)} \\ &= -\frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \quad \text{für ein } \xi \in (0, x) \end{aligned}$$

wobei nach der Landau-Notation gilt: $a \cdot x^n + b \in O(x^n)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \in O(x^3),$$

da $\frac{1}{3(1-\xi)^3}$ konstant für ein ξ im Intervall.

Da ξ variabel ist (also von x abhängt), steht $O(x^3)$ stellvertretend für ein gut passendes Polynom vom Grad 3.

$$\Rightarrow \ln(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

□

Bemerkung 4.4.7

Aus der Definition folgt die Gleichheit beider Funktionen, aber genauer betrachtet kann die $\ln$ -Funktion nicht durch ein Polynom dargestellt werden. Es wird immer einen gewissen Fehler geben, welcher durch das Lagrange-Restglied beziehungsweise die Landaunotation ausgedrückt wird. Da auch in Abhängigkeit von x das ξ gewählt wird, handelt es sich bei dem Lagrange-Restglied nicht um ein Polynom, weil es sich dynamisch verändert.

Im Plot können wir sehen, dass beide Funktionen um unsere Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ herum sehr ähnlich sind.

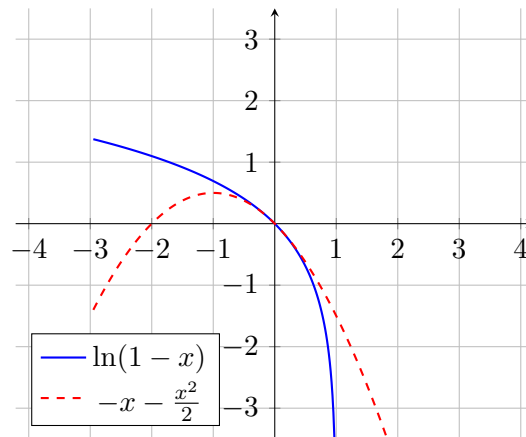


Abbildung 3: Darstellung der Funktionen $\ln(1-x)$ und $-x - \frac{x^2}{2}$

Würden wir die Entwicklung weiterführen, approximiert die rot-gestrichelte Funktion (unser Taylorpolynom) die blaue Funktion ($\ln(1-x)$) immer weiter. Graphisch lässt sich erkennen, dass für Werte im Intervall $I(-0.5, 0.5)$ die Funktion $\ln(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2}$ plus ein kleiner Fehler ist.

4.5 Galtonbrett

Das Galtonbrett ist ein bekanntes Modell zur Veranschaulichung der Normalverteilung der Stochastik. Es demonstriert visuell, wie aus einer Vielzahl von zufälligen unabhängigen Einzelereignissen eine feste mathematische Gesetzmäßigkeit entsteht. Naiv betrachtet ist es nicht auf dem ersten Blick deutlich, dass aus der eigentlichen Binomialverteilung die gaußsche Glockenkurve der Normalverteilung entsteht.

Das Galtonbrett wurde von dem britischen Naturforscher und Universalgelehrten Sir Francis Galton (1822–1911) erfunden. Galton war ein Cousin von Charles Darwin und interessierte sich stark für die Vererbung menschlicher Eigenschaften, wie Körpergröße oder Intelligenz [BH05]. Er stellte auch fest, dass diese Eigenschaften in einer Bevölkerung fast immer einer Glockenkurve der Normalverteilung folgten. Galton suchte nach einem mechanischen Weg, um zu demonstrieren, wie die Vermischung vieler zufälliger genetischer Beiträge der Eltern in der nächsten Generation wieder genau dieselbe Verteilung von Mustern hervorbringt [PM18]. Das Brett diente ihm also ursprünglich als biologisches Analogiemodell für die Vererbung, bevor es zu einem Standardwerkzeug der mathematischen Didaktik wurde, um den zentralen Grenzwertsatz zu visualisieren. Das erste Mal hat Sir Francis Galton das Brett am 17.02.1874 bei einer Vorlesung in der Royal Society vorgestellt [Kar22].

Das grundlegende Prinzip des Galtonbretts ist über die 150 Jahre hinweg völlig gleichgeblieben, doch seine Anwendung und Form haben sich stark gewandelt.

- Der Anfang in den 1870er Jahren mit Galtons originalem Apparat war nicht viel mehr als ein klobiger, hölzerner Kasten mit Glasscheiben. Als „Kugeln“ verwendete er oft Bohnen (weshalb es im Englischen auch Bean Machine genannt wurde).
- Im 20ten Jahrhundert fand das mathematische Prinzip schnell Einzug in die Unterhaltungsindustrie. In Fernsehshows wurde es weltberühmt – so etwa als das Spiel „Plinko“ in der US-amerikanischen Show “The Price Is Right” [PM18] oder in der deutschen Adaption „Der Preis ist heiß“.
- Heute gibt es das Galtonbrett als präzise gefertigte Schreibtisch-Gadgets im Taschenformat, bei denen Tausende winziger Stahlkugeln in lasergeschnittenen Kunststofffril-

len laufen. Zudem wird das Brett heute in Schulen und Universitäten meistens digital als Computersimulation wie bei [Galtonbrett mit variabler Wahrscheinlichkeit – GeoGebra](#) oder [Galtonbrettsimulation](#) genutzt, bei der man Parameter, wie die Fallwahrscheinlichkeit nach links oder rechts, flexibel verändern kann.

5 Arbeitsmaterialien

Das dritte Arbeitsblatt, *Galton x ZSG Mivre-Laplace*, dient dem Beweis des zentralen Grenzwertsatzes von Mivre-Laplace. Ziel ist es hierbei explizit nicht, dass die Schüler*innen den Beweis in jedem Detail, wie im Teil „Mathematischer Hintergrund“, verstehen aber die Grundlegenden Argumentationen und mathematischen Tricks nachvollziehen. Außerdem ist vor allem das Beweisen etwas, dass im Rahmenlehrplan ([LM22] und [LM23]) nicht gefordert ist, wodurch es sich sehr gut für eine MatheAG oder Zusatzstunde handelt, in der Inhalte über den klassischen Unterricht hinaus behandelt werden.

Für das Arbeitsblatt sollten die Schüler*innen bereits mit der Binomialverteilung, Zufallsvariablen, Logarithmen sowie der e-Funktion vertraut sein und mit etwas Formalismus umgehen können. Tiefgreifende Kenntnisse zur Normalverteilung sind nicht vorausgesetzt und werden auf dem Arbeitsblatt in ausreichender Form wiederholt bzw. können selbständig aufbereitet werden. Es ist empfohlen mindestens das Arbeitsblatt *Pascalsches Dreieck* und optimaler Weise auch noch das Arbeitsblatt *Galton x Plinko* vorher bearbeitet zu haben, um das Konzept des Galtonbrettes und dessen Zusammenhang mit der Binomialverteilung verstanden zu haben.

Auf dem Arbeitsblatt wird die formale Modellierung des Galtonbrettes vorgestellt und soll durch eine Zuordnungsaufgabe durch die Schüler*innen vertieft werden. Im Anschluss soll der Bezug zwischen Binomial- und Normalverteilung wiederholt bzw. erarbeitet werden. Das Kernstück des Arbeitsblattes stellt der Lückentext-Ähnliche Beweis dar. Hier sollen die Schüler einige Mathematische Argumentationen nachvollziehen und einige Umformungen selbst durchführen, um den Beweis nachvollziehen zu können. Sollten die Schüler leistungsschwächer sein oder an einem Punkt fest Stecken gibt es zur Differenzierung Lösungskarten für die Lücken, welche den Schülern in nicht sortierter Reihenfolge zur Verfügung gestellt werden können.

6 Zeitplan

Da sich das Themengebiet über einige Niveau- und Klassenstufen des Brandenburger Rahmenlehrplanes streckt [LM23], und das Galtonbrett sich auch sehr gut eignet, auf verschiedenen Komplexitätsstufen zu unterrichten, schlagen wir folgende Unterteilung vor:

Ab 10. Klasse:

Eine Grundlegende Auseinandersetzung mit dem Galtonbrett und den Zusammenhang mit der Binomialverteilung und dem Pascalschem Dreieck, lässt sich wunderbar ohne höhere mathematische Inhalte erarbeiten. Hierzu eignen sich insbesondere das Arbeitsblatt *Galton x Pascal* (c.a. 25 min) und *Galton x Plinko* (c.a. 25 min). Wir würden auch empfehlen beide zu bearbeiten. Wenn eine ausblicksartige Auseinandersetzung im Zusammenhang mit der Normalverteilung gewünscht ist (ohne in die mathematischen Details dieser einzutau-chen) kann hierzu auch noch Aufgabe 1 bis Aufgabe 3 des Arbeitsblattes *Galton x ZSG Mivre-Laplace* (c.a. 15min) mit eingebunden werden.

Ab 12. Klasse:

Um eine tiefgreifende Auseinandersetzung mit dem Galtonbrett zu ermöglichen empfehlen wir alle drei Arbeitsblätter anzubieten. Wir empfehlen mit dem Arbeitsblatt *Galton x Pascal* (c.a. 25 min) zu beginnen, daran das Arbeitsblatt *Galton x Plinko* (c.a. 25 min) anzuschließen und das Arbeitsblatt *Galton x ZSG Moivre-Laplace* (c.a. 40min) zum Abschluss zu benutzen. Das Arbeitsblatt *Galton x Plinko* ist hierbei als optional zu betrachten und dient lediglich der vertiefenden Auseinandersetzung mit dem Galtonbrett und der Motivation.

7 Weiterführende Ideen

Das klassische Galtonbrett ist ein elegantes mechanisches Modell zur Veranschaulichung des lokalen und zentralen Grenzwertsatzes. Die Standardannahme geht dabei von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen aus: jede Kugel trifft an jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.5$ die Entscheidung, nach links oder rechts zu fallen ohne, dass diese sich gegenseitig beeinflussen. Im Rahmen tiefergehender Recherchen zeigen sich jedoch spannende theoretische, sowie praktische Erweiterungsmöglichkeiten, die weit über das Standardmodell hinausgehen.

Zentraler Grenzwertsatz In dieser Arbeit wurde der Fokus auf den lokalen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace gelegt. Es ist ebenso möglich dieses Resultat weiter zum zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace zu erweitern. Hiermit lässt sich zeigen, dass sich die Binomialverteilung mithilfe der Normalverteilung approximieren lässt [[Kos25](#)].

Unabhängigkeit In der Realität ist die strikte Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Schritte oft eine Idealisierung. Physikalisch gesehen könnte eine Kugel den Stift in leichte Schwingungen versetzen oder Drall mitnehmen, was die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Schritt beeinflusst. Mathematisch lässt sich diese Voraussetzung jedoch lockern, indem statt Zufallsvariablen Martingale betrachtet werden. Unter bestimmten Voraussetzungen greif hier dann der Martingal-Zentralgrenzwertsatz, wodurch wieder die Normalverteilung angenähert wird [[posedel'martingale'2025](#)].

Identisch Verteilt Das klassische Brett nutzt auf jeder Ebene die identische Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$. Da auch dies nicht unbedingt immer gewährleistet ist, lässt sich diese Bedingung ebenso aufweichen. Unter der Bedingung, dass keine einzelne Reihe die Gesamtvarianz dominiert (Lindeberg-Bedingung), führt der verallgemeinerte zentrale Grenzwertsatz dennoch zu einer Normalverteilung. Die Glockenkurve bleibt erhalten, auch wenn die Elementarschritte auf dem Weg nach unten variieren [[posedel'martingale'2025](#)].

Erweiterung der Mechanik in der Schule: Das schiefe Galtonbrett Eine physisch leicht umzusetzende Variation ist das Neigen des gesamten Brettes. Durch die Schräglage wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fall nach rechts oder links asymmetrisch, sodass $p \neq 0.5$ gilt. Die Pfade der Kugeln folgen nun einer asymmetrischen Binomialverteilung. Für eine große Anzahl an Stiftreihen n nähert sich die Form (nach dem Satz von Moivre-Laplace) zwar immer noch einer Normalverteilung an, jedoch verschieben sich der Erwartungswert auf $\mu = np$ und die Varianz auf $\sigma^2 = np(1 - p)$. Die Glockenkurve wandert entsprechend der Neigung aus dem physikalischen Zentrum des Brettes heraus, behält aber ihre charakteristische mathematische Struktur bei, was im Unterricht hervorragend zur Einführung von Parametervariationen genutzt werden kann [[schreiter'echt'2022](#)].

8 Einordnung in den Lehrplan

Ein erster Kontakt mit der Binomialverteilung tritt in Form von Binomialkoeffizienten in der zehnten Klasse des Gymnasiums als Teil der Niveaustufe H auf ([LM23]).

Vertieft wird die Binomialverteilung dann im zweiten Semester der Oberstufe und wird im vierten Halbjahr durch die Normalverteilung ergänzt ([LM22]).

Literatur

- [And19] Andreas Pfaffel. *Beweis des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace*. Unter Mitarb. von Statistik verstehen. 28. Okt. 2019. URL: https://www.youtube.com/watch?v=0_RZUWt1CQM (besucht am 11. 06. 2025).
- [Arn25] Arndt Brünner. *Simulation des Galtonbretts*. Simulation des Galtonbretts. 29. Nov. 2025. URL: <https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/galtonbrett.htm> (besucht am 11. 06. 2025).
- [BH05] Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn, Hrsg. *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Mathematik für das Lehramt. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 452 S. DOI: [10.1007/b138982](https://doi.org/10.1007/b138982).
- [End24] Dr. Jörg Enders. „Analysis II“. Universität Potsdam, 2024.
- [FB95] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie*. de. 2. Aufl. Springer-Lehrbuch. New York, NY: Springer, März 1995.
- [Kar22] Karlsruher Institut für Technologie (KIT). *Galton-Brett*. <https://didaktik.math.kit.edu/downloads/Labor/Online-Labor/galtonbrett.pdf>. Abgerufen am 02.07.2026. 2022.
- [Kös06] Wolfgang Kössler. *Folien Stochastik*. Humboldt-Universität zu Berlin, 2006. URL: <https://www2.informatik.hu-berlin.de/~koessler/Stochastik/Stochastik2006/FolienStochastik4.pdf>.
- [Kos25] Dr. Tetiana Kosenkova. „Stochastik für das Lehramt“. Vorlesung. Vorlesung. Universität potsdam, 2025. URL: <https://moodle2.uni-potsdam.de/course/view.php?id=44845> (besucht am 11. 06. 2026).
- [LM22] LISUM und MBJS. *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Fachteil C Mathematik*. 2022. URL: https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf.
- [LM23] LISUM und MBJS. *Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1 bis 10, Fachteil C Mathematik*. 2023. URL: https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma.GenF_1.pdf.
- [Nah15] Harald Nahrstedt. *Die Monte-Carlo-Methode: Beispiele unter Excel VBA*. Essentials. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. ISBN: 978-3-658-10149-7.
- [Nie06] Niels Nielsen. *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig: B. G. Teubner, 1906. ISBN: 978-0274048847.
- [PM18] Judea Pearl und Dana Mackenzie. *The Book of Why: The New Science of Cause and Effect*. New York: Basic Books, 2018. ISBN: 978-0-465-09760-9.

A Arbeitsblatt 1

Die Schülerinnen und Schüler des Matheclubs befinden sich in der Regel in der 7ten bis zur 10ten Klasse. Nehmen wir an, dass man ab der 9ten Klasse erst beitreten kann, beziehungsweise dieses Thema erst mit Neuntklässlern behandelt. Dann ist es angedacht, die Aufgaben Schritt für Schritt aufeinander aufbauen zu lassen. Zunächst sollte jedoch der Binomialkoeffizient Formal definiert werden. Das dient dann als Wiederholung oder auch der Einführung.

Die Verbildlichung des Binomialkoeffizienten und des Pascalschen Dreiecks kann dabei helfen, ein mathematisches Verständnis des Binomialkoeffizienten auszubauen mithilfe einer rekursiven Vorschrift. Im Zuge dessen, kann zwischen den Blättern „Pascalsches Dreieck“ und „Galton x Pascal“ ein kleiner Exkurs zu den binomischen Formeln unternommen werden, in welchem genau die Binomialkoeffizienten vorkommen. Hierbei kann man die Verallgemeinerung der binomischen Formel aufzeigen und als Vereinfachung dieser darstellen, damit man nicht viel auswendig lernen oder anstrengend Klammern ausmultiplizieren muss.

Der Einstieg darin ist mit dem einfachen Berechnen des Binomialkoeffizienten gestaltet, wobei die zwei Basisfälle $k = 0$ und $k = n$ besonders thematisiert werden, welche für die nachfolgenden Aufgaben relevant sind. Da die Berechnung des Binomialkoeffizienten mit der gegebenen Formel nicht besonders schwer ist, wird der Fokus eher auf die Basisfälle gelenkt.

Aus der Grundschule sind den Schülerinnen und Schülern sicherlich auch die Aufgabenpyramiden bekannt, in welchen man ursprünglich mithilfe einer Vorschrift die Pyramide von unten nach oben aufbaut. Hierbei wird die Pyramide jedoch von oben nach unten aufgebaut mithilfe von Rekursion und ebenfalls dem zurückführen auf vorherberechneten Ergebnissen.

Die Gleichheit der Pyramide und der Binomialkoeffizienten zeigen auf wie auf verschiedene Weisen dasselbe Konstrukt (Pascalsches Dreieck) bestimmt werden können. Außerdem dient das gleichzeitig als die oben etwas zu kurz geratene Wiederholung zur Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Die Zusatzaufgabe soll den Ansatz der Rekursion noch einmal verdeutlichen und eine Verbindung zum Fach Informatik herstellen. Da man auch mit Computeralgorithmen Zufallsexperimente darstellen und durchführen kann.

Auf dem nachfolgenden Blatt wird das Galtonbrett kurz und einfach von den Schülerinnen und Schülern mithilfe weniger Vorgaben modelliert. Sinnvoll ist es, vorher ein wenig das Realmodell des Galtonbretts darzustellen. Beispielsweise mithilfe eines echten Galtonbretts für den Schreibtisch, welches im Mathe Club einmal umhergereicht wird.

Das Einzeichnen der Pfade dient den Schülerinnen und Schülern als Verdeutlichung, wo die Kugel entlang geht, und das Abzählen dient dem Ziel alle möglichen Pfade zu erkennen und somit ein Verständnis dafür zu entwickeln. Dadurch wird ein mentales Modell entwickelt, in welchem man ebenfalls kleine Galtonbretter sich vorstellen kann. Auch der Zusammenhang mit der Anzahl möglicher Pfade und dem Pascalschen Dreieck soll dargestellt werden. Hierbei kann auch ein [Video](#) bei welchem der Zusammenhang bei großen Schwierigkeiten noch einmal auf eine andere Weise dargestellt wird.

Die letzte Aufgabe des Blattes soll die Schülerinnen und Schüler in die Richtung der Binomialverteilung leiten. Die dabei entstehende Formel kann aber auch mithilfe des gesamten Kurses erarbeitet werden.

1 Galton x Pascal

Im Stochastik Unterricht ist dir sicherlich schon einmal die Formel des Binomialkoeffizienten (Abb. 1) begegnet.

Definition 1.1: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n Elementen k verschiedene Elemente auszuwählen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Grafik 1: Formel Binomialkoeffizienten

Im Stochastikunterricht ist dir sicherlich schon einmal die Formel des Binomialkoeffizienten begegnet: Zum Warmwerden berechnen wir:

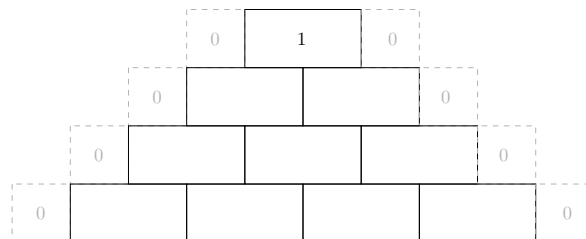
$$\binom{3}{0} = \quad \binom{5}{0} = \quad \binom{n}{0} = \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{3}{3} = \quad \binom{5}{5} = \quad \binom{n}{n} = \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

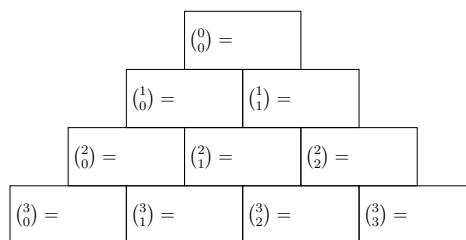
$$\binom{7}{3} = \quad \binom{4}{2} = \quad$$

1. Berechne nun nach folgender Regel:

Die Summe des Steins ist die Summe der darüberliegenden Steine.



2. Berechne die Steine der Pyramide:

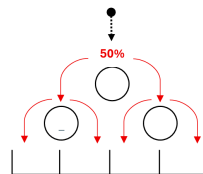


Zusatzaufgabe:

Entwirf einen Computeralgorithmus, der den Binomialkoeffizienten berechnet, ohne dass dieser die Fakultät benutzt!

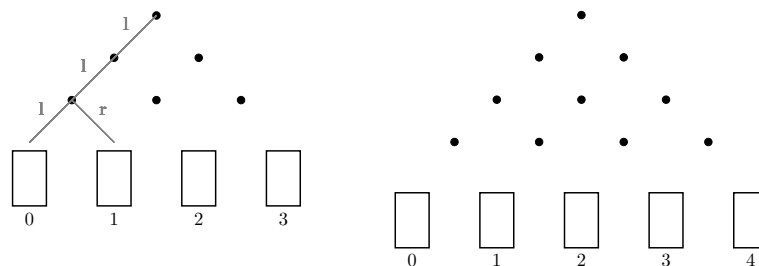
Definition 1.2: Galtonbrett

Das **Galtonbrett** ist ein mechanisches Demonstrationsgerät aus der Stochastik, bei welchem kleine Kugeln auf horizontal und dreieckig angeordnete Stäbchen fallen gelassen wird (hier zweidimensional von vorne dargestellt). Bei jedem Aufprall auf ein Stäbchen teilt sich ihr Weg: entweder nach links, oder nach rechts.



Grafik 2

3. Zeichne in das Galtonbrett alle Wege ein, die eine Murmel nehmen kann, wenn sie auf den obersten Stab fallen gelassen wird. Inwiefern unterscheiden sich beide Galtonbretter?



4. Zähle nun die verschiedenen Pfade, die eine Murmel nehmen kann, sodass sie in den darunterliegenden Fächern landet. (Hinweis: Nutze die Beschreibung, dass eine Kugel immer nur nach rechts (r) oder links (l) fallen kann und schreibe das in Mengenschreibweise, sodass du keinen Pfad vergisst.)
Bsp: Fach 0: $A_0 = \{(L, L, L)\} \Rightarrow \text{Pfade}_0 = |A_0| = 2$

5. Dir ist sicherlich schon aufgefallen, dass die meisten Pfade in die Mitte führen. Untersuche nun die Anzahl der Pfade zu jedem der Stäbchen und vergleiche diese mit dem Pascalschen Dreieck. Was fällt dir auf?

6. Gib die Verteilung des Galtonbretts mithilfe einer Zufallsvariabel X an. Wie könnte diese mit dem pascalschen Dreieck zusammenhängen?

B Arbeitsblatt 2

Dieses Aufgabenblatt soll einen außermathematischen Kontext darstellen, in welchem das Galtonbrett zu finden ist. Im Stochastikunterricht werden häufig Glücksspiele analysiert, um aufzuzeigen, dass diese in den meisten Fällen nicht fair sind. Bei Plinko ist es genauso und lässt sich ebenso einordnen wie die Kontexte und Beispiele aus dem normalen Stochastikunterricht.

Zunächst sollen Hypothesen beziehungsweise Vermutungen aufgestellt werden, welche am Ende des theoretischen Einblicks in die Binomialverteilung überprüft werden können. Darauf zielen diese beiden Arbeitsblätter ab, damit ein Lebensweltbezug für die Schülerinnen und Schüler gegeben wird, anhand dessen man das Galtonbrett rechtfertigen kann.

Die [Simulation von Plinko](#) bietet für die Schülerinnen und Schüler zudem ein spaßiger und nicht so trockner Einstieg in das Galtonbrett. Sinnvoll für die Durchführung und das Überprüfen der Vermutungen könnte die Lehrkraft am Anfang der Stunde die Simulation auf Automatisch stellen und dann kann man am Ende des Unterrichts schonmal eine Aussage über die Fairness und den Erwartungswert des Spiels treffen.

2 Galton x Plinko

Plinko ist ein Glücksspiel aus den 1980er Jahren. Hierbei lässt man einen Ball von oben auf Stäbchen fallen, die wie eine Pyramide angeordnet sind. Ganz unten gibt es Fächer, bei denen der eingesetzte Geldbetrag abhängig vom Fach mit einem bestimmten Faktor multipliziert wird.



1. Probiert dich auf der Webseite plinko-web-game.netlify.app einmal aus!
2. Stell eine Vermutung auf, wieso in der Mitte aller Fächer die kleinsten Faktoren liegen.

3. Stell eine Vermutung auf, wieso die Faktoren an den Randfächern am größten sind.

4. Argumentiere, wieso man auf lange Sicht verliert oder gewinnt.

Mit dem Wissen über das Galtonbrett und seine Verteilung können wir nun fundierte Schlüsse über Plinko ziehen:

5. Die Wahrscheinlichkeit mit der eine Kugel in Plinko nach links bzw. rechts hüpfte ist _____
6. Nenne die Anzahl der Ebenen in Plinko. _____
7. Gib die Anzahl an Faktoren (Fächern) an. _____
8. Gib nun eine Zufallsvariable $X \sim \text{Bin}_{n,p}$ an. _____
9. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
 - a) Die Kugel landet beim Multiplikator 0,3x. _____
 - b) Eine Kugel holt ihren gesetzten Betrag exakt wieder rein. _____
 - c) Eine Kugel landet in einem der beiden höchsten Faktoren. _____
10. Bestimme den Erwartungswert, wenn der Einsatz immer 1\$ ist.
11. Überprüfe die These: "Je höher mein Einsatz ist, desto mehr bekomme ich raus."

C Arbeitsblatt 3

Im dritten Arbeitsblatt lernen die Schüler*innen das Galtonbrett konkret kennen und beweisen semi-formal den zentralen Grenzwertsatz.

3 Galton x ZSG Movire-Laplace

Das Galtonbrett lässt sich wie folgt formal mathematisch formulieren:

Definition 3.1: Modell des Galtonbretts

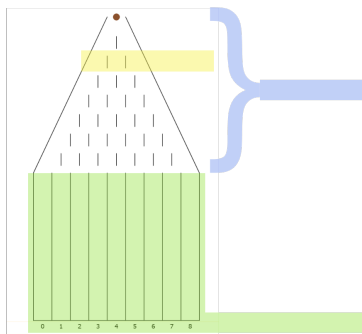
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Der Fall einer Kugel durch ein Galtonbrett mit $n \in \mathbb{N}$ Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$, wobei $X_i \in \{0, 1\}$. Dabei beschreibt $X_i = 1$ den Fall nach rechts in der i -ten Reihe und $X_i = 0$ den Fall nach links. Die Wahrscheinlichkeit sei $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$. Bei einem symmetrischen Brett gilt $p = q = 0.5$. Die Endposition der Kugel im Fach $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird durch die Summe der Rechtsablenkungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

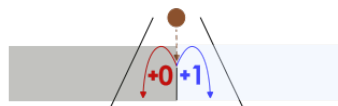
$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Hierbei ist S_n Binomialverteilt.

Aufgabe 1: Um die Definition genauer zu verstehen, ordne die in der Definition hervorgehobenen Teile den folgenden Abbildungen des Galtonbretts zu:



Grafik 1: Darstellung des Galtonbretts nach Brünner (2025)



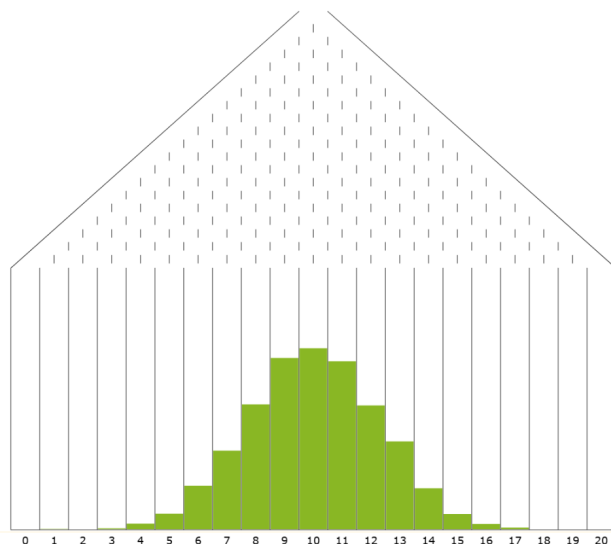
Grafik 2: Darstellung des Falls einer Kugel im Galtonbrett.

Aufgabe 2: Sobald sehr viele Kugeln durch das Galtonbrett gewandert sind, entsteht eine Verteilung, wie in Grafik 3 für ein symmetrisches Brett dargestellt wird.

1. Probiere das ganze selbst einmal auf folgender Website aus: <https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/galtonbrett.htm>. Was fällt dir auf?

Achtung: stelle $p = 0,5$ für ein symmetrisches Brett ein!

2. Recherchiere selbstständig und zeichne den Graphen der Dichtefunktion der Normalverteilung über die Verteilung des Galtonbretts ein:



Grafik 3: Galtonbrett nach c.a. 7000 durchgefallenen Murmeln nach Brünner (2025)

3. Wiederhole oder Recherchiere selbstständig die Eigenschaften der Normalverteilung und Vergleiche diese mit der Binomialverteilung (die Verteilung des Galtonbrettes):

Normalverteilung	Binomialverteilung

Wir wollen nun das schöne mathematische Phänomen, welches sich in Aufgabe 2.2 offenbart, genauer betrachten. Hierzu formulieren wir dies zuerst mathematisch formal sauber:

Satz 3.2: Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und sei $q = 1 - p$ die Gegenwahrscheinlichkeit. (Beispielweise bei einem Galtonbrett)

Für große n lässt sich die Zähldichte von S_n durch die Glockenkurve (Dichtefunktion der Normalverteilung) annähern:

$$P(S_n = k) \sim f_{N(\mu, \sigma^2)}(k)$$

wobei $\mathbb{E}(S_n) = \mu$, $\text{Var}(S_n) = \sigma^2$ und $z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ begrenzt ist.

Diesen Satz wollen wir nun Semi-Formal beweisen.

Aufgabe 3: Fülle die Lücken im Beweis aus. Wenn du dir unsicher bist kannst du dir alle fehlenden Textbausteine auf dem Zusatzblatt ansehen.

1. Bevor wir den Satz beweisen, ist es wichtig, die Aussage zu verstehen. Formuliere die Kernaussage des Satzes kurz in eigenen Worten:

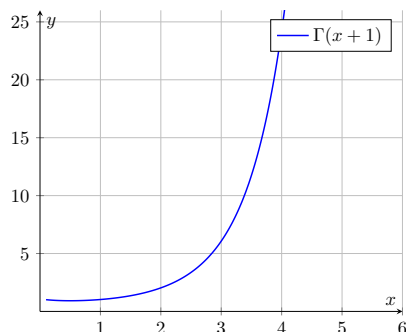
2. Zuerst muss uns nochmal klar werden, was unser Ausgangspunkt und das Ziel ist:

Ausgangspunkt: $P(S_n = k) =$

Ziel: $f_{N(\mu, \sigma^2)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$

3. Wir wollen die Zähldichte der Binomialverteilung (diskrete Verteilung) mithilfe der Dichte einer stetigen Verteilung approximieren. Das Aspekt der Binomialverteilung, welcher die Diskretheit forciert, ist die Fakultät. Die Fakultät der Reellen Zahlen ist die sogenannte Gamma (Γ) Funktion.

Zeichne in dem folgenden Koordinatensystem, in dem auch die Gammafunktion (für $\Gamma(x+1)$) abgebildet ist, die Funktionswerte der Fakultät (welche nur auf $\mathbb{N}$ definiert ist) für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ein:



Mithilfe dieser Funktion lässt sich die Fakultät leicht approximieren. Diese Approximation nennt sich Sterling Approximation und besagt:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \Gamma(n+1)$$

Setzen wir das in die Gleichung für $P(S_n = k)$ ein, erhalten wir nach umstellen:

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

4. Aus dieser Formel lässt sich nun leicht schon einmal der Vorfaktor der Glockenkurve erschließen. Hierzu und zu Vereinfachung weiterer Rechnungen standardisieren wir S_n . Dies

entspricht auch einer einfachen Substitution und daher vollkommen legitim. Hierzu definieren wir:

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

nimmt Z_n die folgenden Werte an:

$$z =$$

Nach dem Umstellen nach k und $n - k$ folgt dann:

$$k =$$

$$n - k =$$

Multiplizieren wir nun diese beiden Ausdrücke miteinander erhalten wir:

$$k(n-k) = n^2 pq + (nz\sqrt{nqp}(q-p) - z^2 npq)$$

Da wir uns nur für eine große Anzahl an Durchführungen also große n ($n \rightarrow \infty$) interessieren, ist beobachtbar, dass für große n der lineare Teil kaum noch einen Einfluss auf den Term hat. Daher kann dieser in diesem Fall weggelassen werden. Daher gilt:

$$k(n-k) \sim n^2 pq$$

Setzen wir dies nun in unsere diskrete Variante von $P(S_n = k)$ ein, erhalten wir den passenden Vorfaktor:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \end{aligned}$$

5. Zum Schluss müssen wir noch die e -Funktion mit in die Gleichung bekommen. Das können wir machen, indem wir die Identität ausnutzen: $x = e^{\ln(x)}$. Also gilt insbesondere, dass:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \Leftrightarrow e^{\ln(P(S_n=k))} \sim e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k}\right)}$$

Beschreibe kurz, was genau die obere Gleichung aussagt und wieso wir einfach die e -Funktion und den (natürlichen) Logarithmus anwenden können!

Im Folgenden betrachten wir erst mal nur den Ausdruck im $\ln()$ welchen wir mithilfe der Logarithmengesetze umformen können:

$$\ln \left(\left(\frac{k}{np} \right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq} \right)^{-n+k} \right) = (-np - z\sqrt{npq}) \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}} \right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}} \right)$$

Nenne die Rechengesetze und Substitutionen, welche vermutlich für diese Umformung genutzt wurden!

Diese Darstellung des Termes sieht zwar erst mal größer aus, hat aber den Vorteil, dass er aus zwei sich sehr ähnlich aussehenden Teilen besteht. Das machen wir uns zu Nutzen! Mithilfe der Taylor-Approximation für den Logarithmus lassen sich nämlich folgende Abschätzungen beweisen:

$$\ln(1 - \alpha) \sim -\alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

Mithilfe einiger Umformungen zufallen dadurch die sich ähnlich sehenden Terme, was zu folgendem, erstaunlichem, Resultat führt:

$$(-np - z\sqrt{npq}) \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}} \right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \sim -\frac{z^2}{2}$$

Zusatzaufgabe:

Rechne dieses Resultat nach!

Setzen wir dieses Ergebnis nun wieder in unsere letzte Version von $P(S_n = k)$ ein, erhalten wir das, was wir beweisen wollten:

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Daher nähert sich die Zähldichte einer binomialverteilten Zufallsvariable (für $n \rightarrow \infty$) der Dichtefunktion der Normalverteilung an.