

1 Galton X Pascal

Im Stochastik Unterricht ist dir sicherlich schon einmal die Formel des Binomialkoeffizienten (Abb. 1) begegnet.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definition 1.1: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n Elementen k verschiedene Elemente auszuwählen.

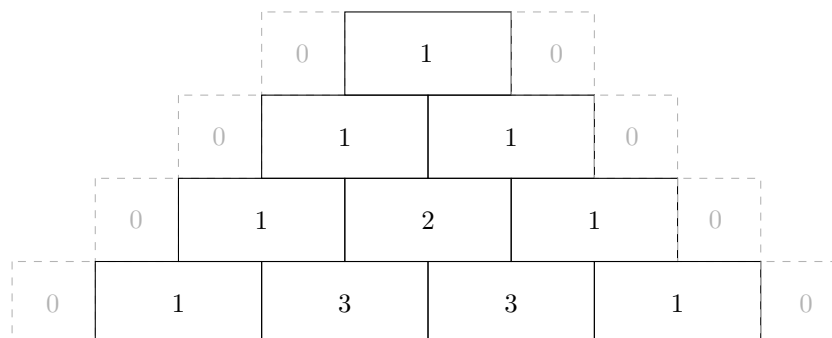
Grafik 1: Formel Binomialkoeffizienten

Im Stochastikunterricht ist dir sicherlich schon einmal die Formel des Binomialkoeffizienten begegnet: Zum Warmwerden berechnen wir:

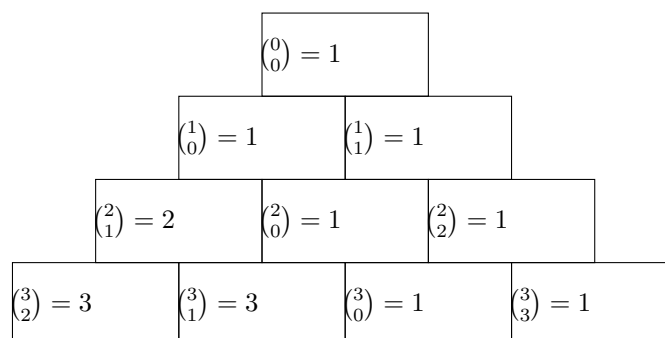
$$\begin{array}{lll} \binom{3}{0} = 1 & \binom{5}{0} = 1 & \binom{n}{0} = 1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ \binom{3}{3} = 1 & \binom{5}{5} = 1 & \binom{n}{n} = 1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ \binom{7}{3} = 35 & \binom{4}{2} = 6 & \end{array}$$

1. Berechne nun nach folgender Regel:

Die Summe des Steins ist die Summe der darüberliegenden Steine.



2. Berechne die Steine der Pyramide:



Zusatzaufgabe:

Entwirf einen Computeralgorithmus, der den Binomialkoeffizienten berechnet, ohne dass dieser die Fakultät benutzt!

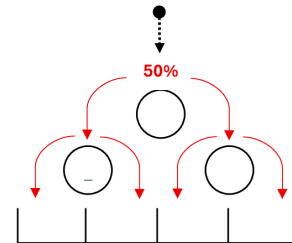
```

1  def binomialCoefficient(n,k):
2      if k == n: return 1
3      elif k == 0: return 1
4      else: return binomialCoefficient(n-1,k-1) + binomialCoefficient(n-1,k)

```

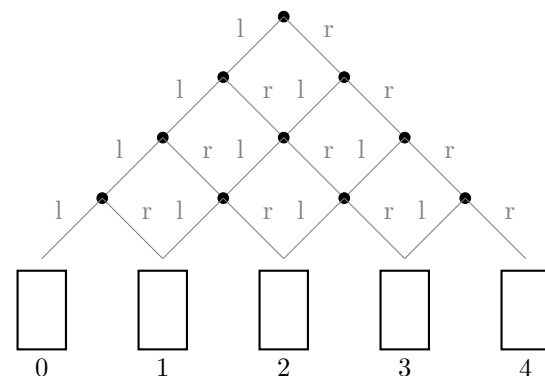
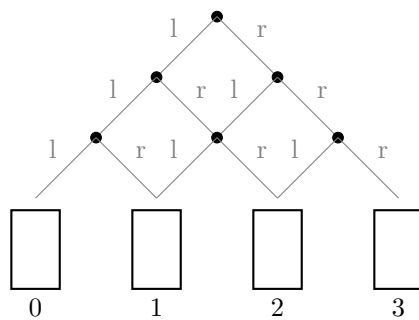
Definition 1.2: Galtonbrett

Das **Galtonbrett** ist ein mechanisches Demonstrationsgerät aus der Stochastik, bei welchem kleine Kugeln auf horizontal und dreieckig angeordnete Stäbchen fallen gelassen wird (hier zweidimensional von vorne dargestellt). Bei jedem Aufprall auf ein Stäbchen teilt sich ihr Weg: entweder nach links, oder nach rechts.



Grafik 2

3. Zeichne in das Galtonbrett alle Wege ein, die eine Murmel nehmen kann, wenn sie auf den obersten Stab fallen gelassen wird. Inwiefern unterscheiden sich beide Galtonbretter?



4. Zähle nun die verschiedenen Pfade, die eine Murmel nehmen kann, sodass sie in den darunterliegenden Fächern landet. (Hinweis: Nutze die Beschreibung, dass eine Kugel immer nur nach rechts (r) oder links (l) fallen kann und schreibe das in Mengenschreibweise, sodass du keinen Pfad vergisst.)

Bsp: Fach 0: $A_0 = \{(L, L, L)\} \Rightarrow \text{Pfade}_0 = |A_0| = 2$

Fach 1: $A_2 = \{(l, l, r), (l, r, l), (r, l, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_2 = |A_2| = 3$

Fach 2: $A_3 = \{(l, r, r), (r, l, r), (r, r, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_3 = |A_3| = 3$

Fach 3: $A_4 = \{(r, r, r)\} \Rightarrow \text{Pfade}_4 = |A_4| = 1$

Fach 0: $B_1 = \{(l, l, l, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_1 = |B_1| = 1$

Fach 1: $B_2 = \{(l, l, l, r), (l, l, r, l), (l, r, l, l), (r, l, l, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_2 = |B_2| = 4$

Fach 2: $B_3 = \{(l, l, r, r), (l, r, l, r), (l, r, r, l), (r, l, l, r), (r, l, r, l), (r, r, l, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_3 = |B_3| = 6$

Fach 3: $B_4 = \{(l, r, r, r), (r, l, r, r), (r, r, l, r), (r, r, r, l)\} \Rightarrow \text{Pfade}_4 = |B_4| = 4$

Fach 4: $B_5 = \{(r, r, r, r)\} \Rightarrow \text{Pfade}_5 = |B_5| = 1$

5. Dir ist sicherlich schon aufgefallen, dass die meisten Pfade in die Mitte führen. Untersuche nun die Anzahl der Pfade zu jedem der Stäbchen und vergleiche diese mit dem Pascalschen Dreieck. Was fällt dir auf?

Die Anzahl, die zu den jeweiligen Stäbchen führen, entspricht genau der Anzahl aus dem Pascalschen Dreieck.

6. Gib die Verteilung des Galtonbretts mithilfe einer Zufallsvariabel X an. Wie könnte diese mit dem pascalschen Dreieck zusammenhängen?

$$\binom{Ebenen}{k} \cdot (0.5)^{Ebenen}$$