

Das Galtonbrett und der zentrale Grenzwertsatz

Fierke, E. & Janik, T. & Weidlich, L.
Seminar Erweitertes Fachwissen - Mathe Club

Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kernideen	2
3	Stichworte	2
4	Mathematischer Hintergrund	2
4.1	Beweis des zentralen Grenzwertsatzes	2
4.2	Gamma-Funktion	4
4.3	Stirling-Approximation	5
5	Arbeitsmaterialien	6
6	Zeitplan	6
7	Weiterführende Ideen	7
8	Einordnung in den Lehrplan	7
A	Anhang 1	7
B	Anhang 2	7

1 Einleitung

Wichtig: Dieses Dokument hier soll nicht mehr als 30 Seiten umfassen (mehr bitte nur nach Absprache).

Ziel des Seminars ist die Ausarbeitung eines „rundum-sorglos-Pakets“ für eine Einheit in einem Matheclub, einer Mathe-AG oder einer ähnlichen Veranstaltung an einem Gymnasium. Unter einer Einheit ist nicht zwingend eine Doppelstunde zu verstehen, aber eine Doppelstunde soll mindestens mit Inhalt gefüllt werden.

Besonders wichtig ist es die folgenden Punkte zu beachten:

1. Es handelt sich um ein Zusatzangebot (Freizeit!) für die Schülerinnen und Schüler. Der Spaß an der Mathematik darf also auf keinen Fall zu kurz kommen.
2. Mathclubs sind in der Regel nach Jahrgängen aufgeteilt. Bei uns sollen als Zielgruppe die Klassenstufen 9-12 angenommen werden. Wählen Sie sinnvoll eine Klassenstufe aus, für die sich ihr Thema eignet. Welche Voraussetzungen bringen die Schülerinnen und Schüler mit?
3. Gehen Sie davon aus, dass Sie es mit motivierten Schülerinnen und Schülern zu tun haben. Die Kinder erwarten klare Argumente, Beweise, etc., die auch über den Lehrplan (deutlich) hinaus gehen.
4. Überlegen Sie, woran Sie Spaß hätten. Seien Sie kreativ!

Wir wollen eine Datenbank für Mathe-Clubs aufbauen. Daher ist eine einheitliche Struktur aller Datensätze zwingend erforderlich. Es sind somit einige technische Punkte zu beachten:

- Halten Sie sich bitte streng an die vorgegebene Latex-Vorlage (inklusive Ordner- und Dateistruktur).

Die Einleitung soll einen kurzen Überblick über den Inhalt des Dokuments geben. Sie soll den Leser neugierig machen und ihn dazu bringen, weiterzulesen. Hier gehören gegebenenfalls (nicht zwingend notwendig!) auch eine geschichtliche Einordnung und Anekdoten hinein (als Unterkapitel).

2 Kernideen

Ziel des Kapitels ist es, der Leserschaft auf einen Blick die zentralen Ideen zu präsentieren. Beschreiben Sie hier also knapp die mathematische Fragestellung. Es soll klar der mathematische Rahmen umrissen werden und die Fragestellung in den größeren Kontext eingeordnet werden.

Falls es einen zentralen Satz gibt, der die Fragestellung beantwortet, dann kann dieser hier auch genannt werden (auch wenn er später nochmal auftaucht und bewiesen wird).

Ansonsten soll die Fragestellung zwar klar umrissen werden, aber eher informell beschrieben werden.

3 Stichworte

Die folgenden **Stichworte** decken in etwa den Inhalt des ausgearbeiteten Themengebietes ab:

- Stochastik
- Welche fundamentalen Ideen werden behandelt?
- zentraler Grenzwertsatz als „Mittelpunkt“
- Binomial- zu Normalverteilung
- Satz von de Moivre
- Satz von Laplace
- Pascalsches Dreieck
- Kreiszahl π
- Stirling-Approximation
- Gamma-Funktion
- Klasse 8 bis 10

4 Mathematischer Hintergrund

Dies ist der zentrale Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) den größten Teil des Dokuments ausmachen.

4.1 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Das Galton-Brett (nach Francis Galton) dient der Veranschaulichung der Binomialverteilung und der experimentellen Bestätigung vom Zentralen Grenzwertsatz im Spezialfall der

Binomialverteilung. Im Folgenden formalisieren wir den Weg einer Kugel durch das Brett als stochastischen Prozess als Binomialverteilung und beweisen anschließend den Zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace.

Definition 4.1.1: Modell des Galton Brett

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.
 Der Fall einer Kugel durch ein Galton-Brett mit $n \in \mathbb{N}$ Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n , wobei $X_i \in \{0, 1\}$. Dabei beschreibt $X_i = 1$ **den Fall nach rechts** in der i -ten Reihe und $X_i = 0$ **den Fall nach links**. Die Wahrscheinlichkeit sei $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$. Bei einem symmetrischen Brett gilt $p = q = 0.5$.

Hierbei ist anzumerken, dass jedes X_i Bernoulliverteilt ist, da

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{und} \quad P(X_i = x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = 1 \\ 1 - p & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Somit lässt sich auch $X_i \sim \mathcal{B}_{0,5}$ schreiben.

Um jeden Ausgang des Galton-Brettes durchnummeriert von links nach rechts unterscheiden zu können, definieren wir uns eine weitere Zufallsvariable S_n wie folgt:

Definition 4.1.2: Zufallsvariable S_n

Die Endposition der Kugel im Fach $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird durch die Summe der Rechtsabbiegungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Anschließend ist folgendes zu bemerken:

Satz 4.1.3: Verteilung der Endposition

Die Zufallsvariable S_n , ist binomialverteilt mit den Parametern n und p . Daher gilt $S_n \sim \mathcal{Bin}_{n,p}$

Beweis. Nach Definition 4.1.1 und Definition 4.1.2 ist S_n die Summe von n unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{B}_p$. Also stellt S_n die Anzahl der Erfolge von n -Wiederholungen von unabhängigen identisch Bernoulli-verteilten Zufallsexperimenten dar. Daraus folgt, dass das Galton-Brett mit der Zufallsvariable S_n eine Binomialmodell darstellt und somit die Binomialverteilung nach Definition eine Zähldichte definiert. Daher gilt: $S_n \sim \mathcal{Bin}_{n,p}$ \square

Anhand des Galton-Brettes lässt sich nun wie bereits beschrieben leicht erkennen, dass bei $n \rightarrow \infty$ Kugeln sich die Verteilung der Kugeln in der Auffangung der Verteilung der Glockenkurve der Normalverteilung annähert.

Satz 4.1.4: Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und sei $q = 1 - p$. Für große n lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass S_n genau den Wert k annimmt, durch die Dichtefunktion der Normalverteilung annähern:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right)$$

Beweis. Der Beweis basiert im Wesentlichen auf drei Approximationen: Der Stirling-Formel für die Fakultäten, der Vereinfachung der Wurzelausdrücke für große n sowie der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus zur Herleitung der Exponentialfunktion. Diese 3 Approximationen werden in diesem Beweis als wahr angenommen, jedoch in der Folgenden Arbeit weiter analysiert und bewiesen.

1. Anwendung der Stirling-Formel:

Wir beginnen mit der Definition der Binomialwahrscheinlichkeit:

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nach der Stirling-Formel gilt für große Zahlen näherungsweise $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ersetzen wir $n!$, $k!$ und $(n-k)!$ durch diese Näherung:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k\right) \left(\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{(n-k)}{e}\right)^{(n-k)}\right)} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{k^k \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^k \cdot n^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k} \sqrt{(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (3)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (1) Hier heben sich die e -Potenzen heraus, da $\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n \cdot e^{-n}$ sowie $e^n / (e^k e^{n-k}) = 1$ gilt.
- (2) Hier lässt sich die Gleichung intelligent aufteilen und etwas umstellen durch die Potenzgesetze, da gilt: $n^n = n^k \cdot n^{n-k}$. Außerdem lässt sich einmal $\sqrt{2\pi}$ kürzen.
- (3) Ist das Resultat nach dem Sortieren der Brüche anhand der Exponenten

...

□

4.2 Gamma-Funktion

Zum nachfolgenden Betrachtung und des Beweises der Stirling-Approximation betrachten wir nun die Gamma-Funktion, auch **Eulersches Integral zweiter Gattung** genannt. Sie erweitert die Fakultätsfunktion von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} auf reelle und komplexe Zahlen (mit einigen Ausnahmen). Hier betrachten wir der Einfachheit halber nur die Gamma-Funktion in \mathbb{R} .

Definition 4.2.1: Gamma-Funktion

Sei $x > 0 \in \mathbb{R}$, dann ist die **Gamma-Funktion** definiert durch

$$\Gamma(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Die Gamma-Funktion berechnet wie folgt die Fakultät in \mathbb{N} :

Satz 4.2.2: Vergleich mit der Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

4.3 Stirling-Approximation

Satz 4.3.1: Stirlingformel

Für $n \rightarrow \infty$ gilt nach STIRLINGS Approximation, dass

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Beweis. Der Ausgangspunkt ist die nach Definition 4.2.1 definierte **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Wir schreiben den Integranden als Exponentialfunktion, dann haben wir

$$t^{x-1} e^{-t} = \exp((x-1) \ln t - t)$$

also ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp((x-1) \ln t - t) dt$$

Setze $t = xu$ und $f(u) = \ln u - u$, dann erhalten wir

$$\Gamma(x) = x^x \cdot \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-xu} du \quad (4)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} \exp(x(\ln u - u)) du \quad (5)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} e^{xf(u)} du \quad (6)$$

Für große x wird das Integral durch die Umgebung des kritischen Punktes von f dominiert. Diese erhält man aus

$$f'(u) = \frac{1}{u} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1.$$

Weiter gilt

$$f''(u) = -\frac{1}{u^2}, \quad \text{also } f''(1) = -1.$$

Damit besitzt f bei $u = 1$ einen stationären Punkt, und wir entwickeln f dort bis zur zweiten Ordnung:

$$f(u) \approx f(1) + \frac{f''(1)}{2}(u-1)^2 = -1 - \frac{(u-1)^2}{2}.$$

Einsetzen liefert die lokale Approximation

$$\Gamma(x) \approx x^x e^{-x} \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du.$$

Da der Hauptbeitrag aus einer Umgebung von $u = 1$ stammt, kann das Integral asymptotisch auf \mathbb{R} erweitert werden.

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Damit erhält man

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

□

5 Arbeitsmaterialien

Stellen Sie Ihre Arbeitsmaterialien hier dar.

Dies ist der zweitwichtigste Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) auch den zweitgrößten Teil des Dokuments ausmachen. Da Arbeitsmaterialien inhaltlich sehr unterschiedlich sind, ist es schwierig, hier genaue Vorgaben zu machen. Eine Bastelanleitung mit Bastelbögen hätte ja z.B. eine ganz andere Struktur als eine Sammlung von Aufgaben und kann schnell ein paar Seiten umfassen...

Falls Sie Arbeitsmaterialien in separaten Dokumenten haben, erstellen Sie hier zumindest eine kurze Beschreibung der entsprechenden Materialien.

Ein paar Anregungen für die Arbeitsmaterialien (kommt natürlich auf das Thema an):

- Aufgaben
- Musterlösungen bzw. Lösungsskizzen
- Knocheien
- Basteleien

Bitte bedenken Sie, zumindest Lösungsskizzen zu den Aufgaben zu geben! Besser noch vollständige Musterlösungen. Als Lehrkraft ist es nicht immer einfach, die Lösungen schnell zu finden und das Dokument soll ja den Lehrkräften die Arbeit erleichtern.

6 Zeitplan

Hier ist kein minutengenaue Zeitplan nötig, aber eine grobe Übersicht über den Zeitplan ist sinnvoll. Insbesondere, wie viel Zeit Sie für die einzelnen Themen bzw. Arbeitsmaterialien veranschlagen.

Das ganze muss nicht in eine Doppelstunde passen, aber es ist sinnvoll, wenn Sie die normalen Doppelstunden als grobe Richtlinie verwenden. Der Zeitplan kann z.B. gerne als eine Tabelle dargestellt werden.

7 Weiterführende Ideen

Da Sie ja umfangreich recherchiert haben, werden Sie deutlich mehr Material haben, als Sie in diesem Dokument unterbringen können. Hier können Sie Ihre weiterführenden Ideen kurz darstellen. Vergessen Sie nicht, auch hier die Quellen anzugeben!

8 Einordnung in den Lehrplan

Ordnen Sie bitte Ihr Material kurz und prägnant in den Lehrplan ein. Das ist wichtig, damit die Lehrkräfte, die Ihr Material verwenden, auch wissen, wo sie es im Lehrplan finden können.

Wichtig: Nicht mehr als eine halbe Seite! Das ist nur eine kurze Einordnung, keine vollständige Darstellung des Lehrplans.

A Anhang 1

Hier können Sie weitere Materialien, die für die Bearbeitung des Themas relevant sind, bereitstellen. Das können zum Beispiel Arbeitsblätter, Übungsaufgaben, Lösungen, weiterführende Literatur oder auch Links zu Online-Ressourcen sein.

B Anhang 2

Wenn Sie verschiedene Materialien bereitstellen möchten, können Sie auch mehrere Anhänge erstellen. Achten Sie darauf, dass die Materialien gut strukturiert und leicht zugänglich sind, damit sie später gut nutzbar sind.