

Das Galtonbrett und der zentrale Grenzwertsatz

Fierke, E. & Janik, T. & Weidlich, L.
Seminar Erweitertes Fachwissen - Mathe Club

Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----|--------------------------------------|----|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Kernideen | 2 |
| 3 | Stichworte | 2 |
| 4 | Mathematischer Hintergrund | 2 |
| 4.1 | Beweis des zentralen Grenzwertsatzes | 3 |
| 4.2 | Pascalsches Dreieck | 8 |
| 4.3 | Taylor-Approximation | 9 |
| 4.4 | Gamma-Funktion | 13 |
| 4.5 | Stirling-Approximation | 13 |
| 5 | Arbeitsmaterialien | 15 |
| 6 | Zeitplan | 15 |
| 7 | Weiterführende Ideen | 15 |
| 8 | Einordnung in den Lehrplan | 15 |
| A | Anhang 1 | 16 |
| B | Anhang 2 | 16 |

1 Einleitung

Wichtig: Dieses Dokument hier soll nicht mehr als 30 Seiten umfassen (mehr bitte nur nach Absprache).

Ziel des Seminars ist die Ausarbeitung eines „rundum-sorglos-Pakets“ für eine Einheit in einem Matheclub, einer Mathe-AG oder einer ähnlichen Veranstaltung an einem Gymnasium. Unter einer Einheit ist nicht zwingend eine Doppelstunde zu verstehen, aber eine Doppelstunde soll mindestens mit Inhalt gefüllt werden.

Besonders wichtig ist es die folgenden Punkte zu beachten:

1. Es handelt sich um ein Zusatzangebot (Freizeit!) für die Schülerinnen und Schüler. Der Spaß an der Mathematik darf also auf keinen Fall zu kurz kommen.
2. Mathclubs sind in der Regel nach Jahrgängen aufgeteilt. Bei uns sollen als Zielgruppe die Klassenstufen 9-12 angenommen werden. Wählen Sie sinnvoll eine Klassenstufe aus, für die sich ihr Thema eignet. Welche Voraussetzungen bringen die Schülerinnen und Schüler mit?
3. Gehen Sie davon aus, dass Sie es mit motivierten Schülerinnen und Schülern zu tun haben. Die Kinder erwarten klare Argumente, Beweise, etc., die auch über den

Lehrplan (deutlich) hinaus gehen.

4. Überlegen Sie, woran Sie Spaß hätten. Seien Sie kreativ!

Wir wollen eine Datenbank für Mathe-Clubs aufbauen. Daher ist eine einheitliche Struktur aller Datensätze zwingend erforderlich. Es sind somit einige technische Punkte zu beachten:

- Halten Sie sich bitte streng an die vorgegebene Latex-Vorlage (inklusive Ordner- und Dateistruktur).

Die Einleitung soll einen kurzen Überblick über den Inhalt des Dokuments geben. Sie soll den Leser neugierig machen und ihn dazu bringen, weiterzulesen. Hier gehören gegebenenfalls (nicht zwingend notwendig!) auch eine geschichtliche Einordnung und Anekdoten hinein (als Unterkapitel).

2 Kernideen

Ziel des Kapitels ist es, der Leserschaft auf einen Blick die zentralen Ideen zu präsentieren. Beschreiben Sie hier also knapp die mathematische Fragestellung. Es soll klar der mathematische Rahmen umrissen werden und die Fragestellung in den größeren Kontext eingeordnet werden.

Falls es einen zentralen Satz gibt, der die Fragestellung beantwortet, dann kann dieser hier auch genannt werden (auch wenn er später nochmal auftaucht und bewiesen wird).

Ansonsten soll die Fragestellung zwar klar umrissen werden, aber eher informell beschrieben werden.

3 Stichworte

Die folgenden **Stichworte** decken in etwa den Inhalt des ausgearbeiteten Themengebietes ab:

- Stochastik
- Welche fundamentalen Ideen werden behandelt?
- zentraler Grenzwertsatz als „Mittelpunkt“
- Binomial- zu Normalverteilung
- Satz von de Moivre
- Satz von Laplace
- Pascalsches Dreieck
- Kreiszahl π
- Stirling-Approximation
- Gamma-Funktion
- Klasse 8 bis 10

4 Mathematischer Hintergrund

Dies ist der zentrale Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) den größten Teil des Dokuments ausmachen.

4.1 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Das Galton-Brett (nach Francis Galton) dient der Veranschaulichung der Binomialverteilung und der experimentellen Bestätigung vom Zentralen Grenzwertsatz im Spezialfall der Binomialverteilung. Im Folgenden formalisieren wir den Weg einer Kugel durch das Brett als stochastischen Prozess als Binomialverteilung und beweisen anschließend den Zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace.

Definition 4.1.1: Modell des Galton Brett

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Der Fall einer Kugel durch ein Galton-Brett mit $n \in \mathbb{N}$ Reihen wird modelliert durch eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n , wobei $X_i \in \{0, 1\}$. Dabei beschreibt $X_i = 1$ **den Fall nach rechts** in der i -ten Reihe und $X_i = 0$ **den Fall nach links**. Die Wahrscheinlichkeit sei $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$. Bei einem symmetrischen Brett gilt $p = q = 0.5$.

Hierbei ist anzumerken, dass jedes X_i Bernoulliverteilt ist, da

$$\Omega = \{1, 0\} \quad \text{und} \quad P(X_i = x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = 1 \\ 1 - p & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Somit lässt sich auch $X_i \sim \mathcal{B}_{0,5}$ schreiben.

Um jeden Ausgang des Galton-Brettes durchnummeriert von links nach rechts unterscheiden zu können, definieren wir uns eine weitere Zufallsvariable S_n wie folgt:

Definition 4.1.2: Zufallsvariable S_n

Die Endposition der Kugel im Fach $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wird durch die Summe der Rechtsabbiegungen beschrieben. Wir definieren die Zufallsvariable:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Anschließend ist folgendes zu bemerken:

Satz 4.1.3: Verteilung der Endposition

Die Zufallsvariable S_n ist binomialverteilt mit den Parametern n und p . Daher gilt $S_n \sim \mathcal{B}in_{n,p}$

Beweis. Nach Definition 4.1.1 und Definition 4.1.2 ist S_n die Summe von n unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{B}_p$. Also stellt S_n die Anzahl der Erfolge von n -Wiederholungen von unabhängigen identisch Bernoulli-verteilten Zufallsexperimenten dar. Daraus folgt, dass das Galton-Brett mit der Zufallsvariable S_n eine Binomialmodell darstellt und somit die Binomialverteilung nach Definition eine Zähldichte definiert. Daher gilt: $S_n \sim \mathcal{B}in_{n,p}$ \square

Anhand des Galton-Brettes lässt sich nun wie bereits beschrieben leicht erkennen, dass bei $n \rightarrow \infty$ Kugeln sich die Verteilung der Kugeln in der Auffangung der Verteilung der Glockenkurve der Normalverteilung annähert.

Satz 4.1.4: Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $S_n \sim \text{Bin}_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und sei $q = 1 - p$. Für große n lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass S_n genau den Wert k annimmt, durch die Dichtefunktion der Normalverteilung annähern:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)}$$

Beweis. Der Beweis basiert im Wesentlichen auf drei Approximationen: Der Stirling-Formel für die Fakultäten, der Vereinfachung der Wurzelausdrücke für große n sowie der Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus zur Herleitung der Exponentialfunktion. Diese 3 Approximationen werden in diesem Beweis als wahr angenommen, jedoch in der Folgenden Arbeit weiter analysiert und bewiesen.

1. Anwendung der Stirling-Formel:

Wir beginnen mit der Definition der Binomialwahrscheinlichkeit:

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nach Satz 4.5.1 gilt für große Zahlen näherungsweise $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ersetzen wir $n!$, $k!$ und $(n-k)!$ durch diese Näherung:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k\right) \left(\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{(n-k)}{e}\right)^{(n-k)}\right)} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{k^k \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{n} \cdot n^k \cdot n^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k} \sqrt{(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (3)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (1) Hier heben sich die e -Potenzen heraus, da $\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^n \cdot e^{-n}$ sowie $e^n / (e^k e^{n-k}) = 1$ gilt.
- (2) Hier lässt sich die Gleichung intelligent aufteilen und etwas umstellen durch die Potenzgesetze, da gilt: $n^n = n^k \cdot n^{n-k}$. Außerdem lässt sich einmal $\sqrt{2\pi}$ kürzen.
- (3) Ist das Resultat nach dem Sortieren der Brüche anhand der Exponenten

2. Substitution und Approximation der Wurzeln:

Um das breiter werden der Verteilung und das Abwandern des Erwartungswertes zu verhindern standardisieren wir die Zufallsvariable, indem wir

$$Z_n = \frac{S_n - E(X_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

definieren. Nun nimmt Z_n Werte $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ an, nach k und nach $n-k$ umgestellt heißt das

$$k = np + z\sqrt{npq}$$

$$n - k = nq - z\sqrt{npq}$$

Nun betrachten wir $k \cdot (n - k)$ für $n \rightarrow \infty$:

$$k(n - k) = (np + z\sqrt{npq}) \cdot (nq - z\sqrt{npq}) \quad (4)$$

$$= n^2pq + (nz\sqrt{npq}(q - p) - z^2npq) \quad (5)$$

$$\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} n^2pq + O(n) \quad (6)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (4) Formeln für k und $n - k$ einsetzen
- (5) Distributivgesetz anwenden und nach Potenz von n sortieren
- (6) n^2 geht für $n \rightarrow \infty$ schneller nach unendlich als die linearen Restterme. Folglich sind diese für die Abschätzung gegen unendlich vernachlässigbar.

Setzen wir dieses Ergebnis nun in das Zwischenergebnis von Gleichung (3) ein erhalten wir folgendes:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n^2pq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} \quad (9)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (7) Approximation verwenden
- (8) n kürzen und Potenz-/Wurzelgesetze anwenden um Bruch zu vereinfachen
- (9) Kehrwert der Brüche bilden und Wurzeln zusammenfassen

Es ist bereits der korrekte konstante Faktor der Gaußschen Glockenkurve erkennbar.

3. Taylor-Approximation des exponentiellen Teils:

Den restlichen Term formen wir um, indem wir ihn logarithmieren um im Anschluss die Approximationsformel für den Logarithmus verwenden zu können. Diese wird ebenso wie die Stirling-Formel im Anschluss bewiesen. Hierzu betrachten wir folgendes zuerst einzeln:

$$\ln\left(\left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k}\right) \quad (10)$$

$$= -k \ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k) \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) \quad (11)$$

$$= -(np + z\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{np + z\sqrt{npq}}{np}\right) - (nq - z\sqrt{npq}) \ln\left(\frac{nq - z\sqrt{npq}}{nq}\right) \quad (12)$$

$$= (-np - z\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \quad (13)$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (10) logarithmieren

- (11) Logarithmengesetze für Potenzen anwenden.
 (12) Gleichheit für k aus der Standardisierung einsetzen: $k = np + z\sqrt{npq}$.
 (13) Distributivgesetz für -1 anwenden und Brüche durch Aufteilen der Addition und Einfügen der multiplikativen Identität $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{np}}$ (selbes für nq) vereinfachen.

Die Taylor-Approximation besagt: $\ln(1 - \alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$ Hierbei steht $O(\alpha^3)$ für die Landau-Notation. Wir definieren

$$\beta := \sqrt{\frac{q}{np}}; \quad \gamma := \sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Um diese Approximation zu verwenden, muss sicher sein, dass $|\alpha| < 1$. Das heißt, dass $\forall z \in \mathbb{R} : |z \cdot \beta| \stackrel{n \rightarrow \infty}{<} 1$. (Für $z \cdot \gamma$ analog)
 Sei also $z \in \mathbb{N}$, dann betrachten wir:

$$|z \cdot \beta| \stackrel{Def.}{=} \left| z \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right| = |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 < 1$$

Da p und q konstante Parameter sind.

Betrachten wir nun die Logarithmen für die Taylor-Approximation näher:

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) &\approx z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2}{2} + O((z\beta)^3) \\ &= z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2q}{2np} + O((z\beta)^3) \end{aligned}$$

und für den anderen ln analog:

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &\approx -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{\left(z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2}{2} + O((-z\gamma)^3) \\ &= -z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2p}{2nq} + O((z\gamma)^3) \quad - \text{ fällt wegen } O \text{ weg} \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun zurück in Gleichung (12) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(-np - z\sqrt{npq}) \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + z\sqrt{npq}) \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \\ &= (-np - z\sqrt{npq})\left(z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{z^2q}{2np} + O((z\beta)^3)\right) \\ &\quad + (-nq + z\sqrt{npq})\left(-z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{z^2p}{2nq} + O((z\gamma)^3)\right) \\ &= (-npz\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{npz^2q}{2np} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{q}{np}} + O((z\beta)^3)) \\ &\quad + (nqz\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{nqz^2p}{2nq} - z^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{p}{nq}} + O((z\gamma)^3)) \\ &\quad + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \quad (14) \\ &= \left(-z\sqrt{\frac{(np)^2q}{np}} + \frac{z^2q}{2} - z^2\sqrt{\frac{npq^2}{np}} + O((z\beta)^3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(z \sqrt{\frac{(nq)^2 p}{nq}} + \frac{z^2 p}{2} - z^2 \sqrt{\frac{np^2 q}{nq}} + O((z\gamma)^3) \right) \\
& + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (-z\sqrt{npq} - z^2 q + \frac{z^2 q}{2} + O((z\beta)^3)) + (z\sqrt{npq} - z^2 p + \frac{z^2 p}{2} + O((z\gamma)^3)) \\
& + (-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\approx \left(-z\sqrt{npq} - \frac{z^2 q}{2} \right) + \left(z\sqrt{npq} - \frac{z^2 p}{2} \right) \tag{17}$$

$$= -\frac{z^2 q}{2} - \frac{z^2 p}{2} = -\frac{z^2}{2}(p + q) \tag{18}$$

$$= -\frac{z^2}{2} \tag{19}$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (14) Distributivgesetz
- (15) np und nq mithilfe des Quadrates in die Wurzel ziehen, sowie Kürzen und Wurzeln zusammenfassen. Alle Terme mit z^3 werden von $O(z^3)$ nach dessen Definition „absorbiert“.
- (16) np und nq in den Wurzeln Kürzen und Kommutativgesetz anwenden
- (17) Die Landau Terme ($O(z^3)$) können vernachlässigt werden, da diese Terme für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. Betrachte Hierzu Lemma 4.1.5 und Proposition 4.1.6.
- (18) $-z\sqrt{npq} + z\sqrt{npq} = 0$ und Distributivgesetz (invers)
- (19) $p + q = 1$ da $q = 1 - p$ definiert wurde.

Da $e^{\ln(l)} = l$ setzen wir nun $e^{-\frac{z^2}{2}}$ in Gleichung (9) ein kommen wir zum finalen Ergebnis:

$$\begin{aligned}
P(S_n = k) & \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}} \tag{20}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)} \tag{21}$$

Im Folgenden werden die nummerierten Schritte der Gleichungsketten erläutert:

- (20) Rücksubstitution der Standardisierung.
- (21) Der Bruch wurde quadriert und zusammengefasst.

Daher konvergiert eine Binomialverteilte Zufallsvariable (für $n \rightarrow \infty$) gegen die Standardnormalverteilung. \square

Lemma 4.1.5: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme mit Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und $z \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus multipliziert mit ihren jeweiligen Vorfaktoren gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3) + (-nq + z\sqrt{npq}) \cdot O((z\gamma)^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma = \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

Beweis. Wir betrachten exemplarisch den ersten Summanden (der zweite verhält sich vollkommen analog). Da $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$, verhält sich der Restterm dritter Ordnung bezüglich n wie folgt:

$$O((z\beta)^3) = O\left(z^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3\right) = O\left(\frac{z^3 q^{3/2}}{p^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\right) \subseteq O(n^{-3/2})$$

Nach der Definition der Landau-Notation existiert für hinreichend große n eine Konstante $C > 0$, sodass der Betrag dieses Restterms durch $C \cdot n^{-3/2}$ nach oben beschränkt ist. Multiplizieren wir dies mit dem Betrag des Vorfaktors, erhalten wir mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |(-np - z\sqrt{npq}) \cdot O((z\beta)^3)| &\leq (np + |z|\sqrt{npq}) \cdot C \cdot n^{-3/2} \\ &= C \cdot np \cdot n^{-3/2} + C \cdot |z|\sqrt{npq} \cdot n^{-3/2} \\ &= C \cdot p \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + C \cdot |z|\sqrt{pq} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da C, p, q und z von n unabhängige Konstanten sind und n im Nenner unbegrenzt wächst, strebt dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen:

$$0 + 0 = 0$$

Für den zweiten Term mit γ erfolgt der Beweis völlig analog, womit die Summe beider Terme ebenfalls gegen 0 konvergiert. \square

Folgende Proposition ist leicht aus dem oberen Beweis ableitbar (aufgrund der Abschätzung mit $n^{-3/2}$) und wird daher nicht separat bewiesen.

Proposition 4.1.6: Asymptotisches Verschwinden der Taylor-Restterme ohne Präfix

Seien $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ und $z \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für die Restterme der Taylor-Entwicklung des Logarithmus gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$O((z\beta)^3) + O((z\gamma)^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{q}{np}}$ und $\gamma = \sqrt{\frac{p}{nq}}$ definiert sind.

4.2 Pascalsches Dreieck

Das Pascalsche Dreieck ist ein geometrisches Dreieck aus Zahlen, das sich unendlich nach unten fortsetzt und dabei die Binomialkoeffizienten repräsentiert.

Definition 4.2.1: Binomialkoeffizienten¹

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

wobei die Zahl $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge genau k -Elemente auszuwählen, angibt.

Aus dieser Definition entwickeln wir das Pascalsche Dreieck.

Approximation nach dem quadratischen Term abbrechen werden genügt es zu zeigen, dass $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar ist.

Lemma 4.3.1

$f(x) = \ln(1-x)$ ist mindestens dreimal differenzierbar.

Beweis. Zum Beweis berechnen wir die drei Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(1-x))' \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' && \text{Kettenregel} \\ &= -\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(-\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{(-1)' \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} && \text{Quotientenregel} \\ &= \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} && \text{da } (-1)' \cdot (1-x) = 0 \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (f''(x))' \\ &= \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{(-1)' \cdot (1-x)^2 - (-1) \cdot ((1-x)^2)'}{((1-x)^2)^2} && \text{Quotientenregel} \\ &= \frac{((1-x)^2)'}{(1-x)^4} && \text{da } (-1)' \cdot (1-x)^2 = 0 \\ &= \frac{-2 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} && \text{Kettenregel} \\ &= \frac{-2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

□

Nun haben wir nachgewiesen, dass die Funktion $\ln(1-x)$ dreimal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.3.2

Mit einem Blick auf die Funktion und wie ihre Ableitungen gebildet werden, ist leicht zu erkennen, dass $\ln(x-1)$ sogar unendlich oft differenzierbar ist.

Bevor wir die Approximation nachweisen ist eine formale Definition des Satzes von Taylor und dem Taylorpolynom nötig, wobei letzteres aus dem Satz von Taylor folgt.

Satz 4.3.3: Satz von Taylor²

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in [a, b]$.

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Es existiert ein (von x abhängiges $\xi \in I(x_0, x)$), sodass für das Lagrange-Restglied gilt:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

Bemerkung 4.3.4

Das Lagrange-Restglied ist in den meisten Fällen eine Funktion vom Grad $n + 1$, aufgrund des letzten Faktors. Es kann aber auch sein, dass das Lagrange-Restglied das Nullpolynom ist, je nach Wahl von ξ und der Auswertung von der n -ten Ableitung von f an der Stelle ξ .

Dadurch können wir das Restglied auch auffassen als ein Element von $O(x^n)$. Nach der Definition der Landau-Notation gilt: für alle $a, b \in \mathbb{R} : a * x^n + b$ liegt in $O(x^n)$. Man kann somit das Landausymbol O als Ansammlung von Funktionen verstehen. Interessanterweise gilt auch eine Relation zwischen den einzelnen „Landaumengen“. Für alle $n \in \mathbb{N} : O(x^n)$ ist in $O(x^{n+1})$. In der Informatik wird diese Notation genutzt, um asymptotische Verhalten von beispielsweise Laufzeiten zu beschreiben. „Algorithmus A braucht asymptotisch so viel Zeit in Abhängigkeit von der Eingabe, wie eine x^n -Funktion“.

Die Definition des Taylorpolynoms entspringt direkt dem Satz von Taylor, nur ohne das Lagrange-Restglied.

Definition 4.3.5: Taylorpolynom

$$T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Bemerkung 4.3.6

Der Satz von Taylor liefert eine lokale Approximation an eine Funktion f durch das Taylorpolynom.

Nun können wir unsere Approximation von $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ zeigen.

Lemma 4.3.7

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Beweis. Zunächst ist der Definitionsbereich von $\ln(1 - x)$ gleich dem Intervall $(-\infty, 1)$. Zudem ist die Funktion $\ln(1 - x)$ mindestens dreimal differenzierbar. Betrachten wir $x \in$

$(-\infty, 1)$ und $x_0 = 0$.

Das zweite Taylor-Polynom lautet

$$\begin{aligned} T_{\ln(1-x),0,2}(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \cdot (\ln(1-x))^{(k)} (x-x_0)^k \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \ln(1) \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot (\ln(1))^{(1)} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (\ln(1))^{(2)} \cdot x^2 \quad \text{Lemma 4.3.1} \\ &= 0 + 1 \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot x^2 \\ &= -x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Taylor (Satz 4.3.3) folgt somit:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

wobei das Lagrange-Restglied etwa $R_2(x) \approx O(x^3)$, denn

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{1}{(2+1)!} \cdot (\ln(1-\xi))^{(2+1)} \cdot (x-0)^{(2+1)} \\ &= -\frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \quad \text{für ein } \xi \in (0, x) \quad \text{Lemma 4.3.1} \end{aligned}$$

wobei nach der Landau-Notation gilt: $a \cdot x^n + b \in O(x^n)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(1-\xi)^3} \cdot x^3 \in O(x^3),$$

da $\frac{1}{3(1-\xi)^3}$ konstant für ein ξ im Intervall.

Da ξ variabel ist (also von x abhängt), steht $O(x^3)$ stellvertretend für ein gut passendes Polynom vom Grad 3.

$$\Rightarrow \ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

□

Bemerkung 4.3.8

Aus der Definition folgt die Gleichheit beider Funktionen, aber genauer betrachtet kann die In-Funktion nicht durch ein Polynom dargestellt werden. Es wird immer einen gewissen Fehler geben. Da auch in abhängigkeit von x das ξ gewählt wird, handelt es sich bei dem Lagrange-Restglied nicht um ein Polynom, weil es sich dynamisch verändert.

Im Plot können wir sehen, dass beide Funktionen um unsere Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ herum sehr ähnlich sind.

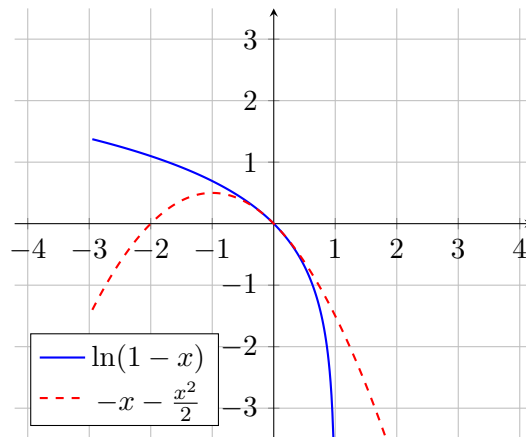


Abbildung 1: Darstellung der Funktionen $\ln(1-x)$ und $-x - \frac{x^2}{2}$

Würden wir die Entwicklung weiterführen, approximiert die violette Funktion (unser Taylorpolynom) die orangene Funktion ($\ln(1-x)$) immer weiter. Graphisch lässt sich erkennen, dass für Werte im Intervall $I(-0.5, 0.5)$ die Funktion $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2}$ plus ein kleiner Fehler ist.

4.4 Gamma-Funktion

Zum nachfolgenden Betrachtung und des Beweises der Stirling-Approximation betrachten wir nun die Gamma-Funktion, auch **Eulersches Integral zweiter Gattung** genannt. Sie erweitert die Fakultätsfunktion von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} auf reelle und komplexe Zahlen (mit einigen Ausnahmen). Hier betrachten wir der Einfachheit halber nur die Gamma-Funktion in \mathbb{R} .

Definition 4.4.1: Gamma-Funktion

Sei $x > 0 \in \mathbb{R}$, dann ist die **Gamma-Funktion** definiert durch

$$\Gamma(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Die Gamma-Funktion berechnet wie folgt die Fakultät in \mathbb{N} :

Satz 4.4.2: Vergleich mit der Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

4.5 Stirling-Approximation

Die Stirling-Approximation ist eine mathematische Näherung zur Berechnung der Fakultät einer Zahl. Die Approximation ist vorallem in der Stochastik und der statistischen Physik ein unverzichtbares Werkzeug. Wir schauen sie daher im Folgenden im Detail an.

Satz 4.5.1: Stirlingformel

Für $n \mapsto \infty$ gilt nach STIRLINGS Approximation, dass

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Beweis. Der Ausgangspunkt ist die nach Definition 4.4.1 definierte **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Wir schreiben den Integranden als Exponentialfunktion, dann haben wir

$$t^{x-1} e^{-t} = \exp((x-1) \ln t - t)$$

also ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp((x-1) \ln t - t) dt$$

Setze $t = xu$ und $f(u) = \ln u - u$, dann erhalten wir

$$\Gamma(x) = x^x \cdot \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-xu} du \quad (22)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} \exp(x(\ln u - u)) du \quad (23)$$

$$= x^x \cdot \int_0^{\infty} e^{xf(u)} du \quad (24)$$

Für große x wird das Integral durch die Umgebung des kritischen Punktes von f dominiert. Diese erhält man aus

$$f'(u) = \frac{1}{u} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1.$$

Weiter gilt

$$f''(u) = -\frac{1}{u^2}, \quad \text{also } f''(1) = -1.$$

Damit besitzt f bei $u = 1$ einen stationären Punkt, und wir entwickeln f dort bis zur zweiten Ordnung:

$$f(u) \approx f(1) + \frac{f''(1)}{2} (u-1)^2 = -1 - \frac{(u-1)^2}{2}.$$

Einsetzen liefert die lokale Approximation

$$\Gamma(x) \approx x^x e^{-x} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du.$$

Da der Hauptbeitrag aus einer Umgebung von $u = 1$ stammt, kann das Integral asymptotisch auf \mathbb{R} erweitert werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}(u-1)^2\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Damit erhält man

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

□

5 Arbeitsmaterialien

Stellen Sie Ihre Arbeitsmaterialien hier dar.

Dies ist der zweitwichtigste Teil des Dokuments und soll (inhaltlich) auch den zweitgrößten Teil des Dokuments ausmachen. Da Arbeitsmaterialien inhaltlich sehr unterschiedlich sind, ist es schwierig, hier genaue Vorgaben zu machen. Eine Bastelanleitung mit Bastelbögen hätte ja z.B. eine ganz andere Struktur als eine Sammlung von Aufgaben und kann schnell ein paar Seiten umfassen...

Falls Sie Arbeitsmaterialien in separaten Dokumenten haben, erstellen Sie hier zumindest eine kurze Beschreibung der entsprechenden Materialien.

Ein paar Anregungen für die Arbeitsmaterialien (kommt natürlich auf das Thema an):

- Aufgaben
- Musterlösungen bzw. Lösungsskizzen
- Knobeleien
- Basteleien

Bitte bedenken Sie, zumindest Lösungsskizzen zu den Aufgaben zu geben! Besser noch vollständige Musterlösungen. Als Lehrkraft ist es nicht immer einfach, die Lösungen schnell zu finden und das Dokument soll ja den Lehrkräften die Arbeit erleichtern.

6 Zeitplan

Hier ist kein minutengenauer Zeitplan nötig, aber eine grobe Übersicht über den Zeitplan ist sinnvoll. Insbesondere, wie viel Zeit Sie für die einzelnen Themen bzw. Arbeitsmaterialien veranschlagen.

Das ganze muss nicht in eine Doppelstunde passen, aber es ist sinnvoll, wenn Sie die normalen Doppelstunden als grobe Richtlinie verwenden. Der Zeitplan kann z.B. gerne als eine Tabelle dargestellt werden.

7 Weiterführende Ideen

Da Sie ja umfangreich recherchiert haben, werden Sie deutlich mehr Material haben, als Sie in diesem Dokument unterbringen können. Hier können Sie Ihre weiterführenden Ideen kurz darstellen. Vergessen Sie nicht, auch hier die Quellen anzugeben!

8 Einordnung in den Lehrplan

Ordnen Sie bitte Ihr Material kurz und prägnant in den Lehrplan ein. Das ist wichtig, damit die Lehrkräfte, die Ihr Material verwenden, auch wissen, wo sie es im Lehrplan finden können. Wichtig: Nicht mehr als eine halbe Seite! Das ist nur eine kurze Einordnung, keine vollständige Darstellung des Lehrplans.

A Anhang 1

Hier können Sie weitere Materialien, die für die Bearbeitung des Themas relevant sind, bereitstellen. Das können zum Beispiel Arbeitsblätter, Übungsaufgaben, Lösungen, weiterführende Literatur oder auch Links zu Online-Ressourcen sein.

B Anhang 2

Wenn Sie verschiedene Materialien bereitstellen möchten, können Sie auch mehrere Anhänge erstellen. Achten Sie darauf, dass die Materialien gut strukturiert und leicht zugänglich sind, damit sie später gut nutzbar sind.